Pielikums

A. Cēbera lekciju kursa

“TEORĒTISKĀ HIDRODINAMIKA”

ievadlekcijas

XVII PIELIKUMS: "TEORĒTISKĀ HIDROSINAMIKA", IEVADLEKCIJAS

Priekšvārds

Sekojošās nodaļas veidotas balstoties uz maniem A.Cēbera lekciju kursa "Teorētiskā hidrodinamika" pierakstiem. Nepieciešamības gadījumā satura skaidrākai izpratnei veidoju izsmeļošākus izvedumus un plašākus aprakstus. Šī darba lasīšanā ieteicams izmantot tā elektronisko MS Word versiju, jo materiāla uztveramību uzlaboju izveidojot saites terminiem vai formulām, kas norāda vietu darbā, kurā šis termins tiek paskaidrots sīkāk, vai formula tiek izvesta.

Kvadrātiekavās "[]" likts tas literatūras avots, kas izmantots konkrētajā darba vietā.

L.Strazdiņa

1. HIDRODINAMIKAS PAMATJĒDZIENI

1.1. KAS IR NEPĀRTRAUKTA VIDE

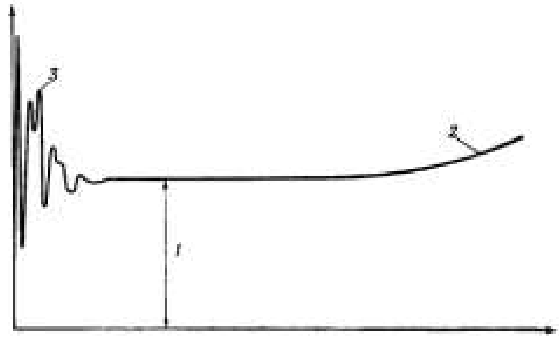
1.1.1. Šķidrumu struktūra un molekulu izkārtojums

Šķidrumos molekulu noteikts sakārtojums katras molekulas ļoti mazā apkārtnē saglabājas tikai īslaicīgi, to izjauc molekulu haotiskā pārvietošanās. Tomēr šķidrumos molekulārie mijiedarbības spēki ir tik lieli, ka to darbības rezultātā vidējie attālumi starp molekulām nemainās.

1.1.2. Nepārtrauktas vides pazīmes

Hidrodinamikā šķidrumu apskata kā nepārtrauktu vidi. Šādai videi ir sekojošas pazīmes:

- katrs ļoti mazs tilpuma elements satur ļoti daudz molekulu
  (Lai lokāli izmērītu kādu raksturlielumu, jāapskata mazs tilpuma elements, tomēr arī šis mazais elements satur pietiekoši daudz molekulu, t.i. ir liels, salīdzinot ar starpmolekulārajiem attālumiem.),
- vielai var neievērot tās molekulāro uzbūvi
  (Molekulu īpašību radītās fluktuācijas nevar iespaidot mēraparātu rādījumus),
- pieņem, ka vides raksturlielumi ir nepārtrauktas laika un koordinātu funkcijas.
  Patiesībā šie raksturlielumi (ātrums, kustības daudzums, blīvums) nav vienmērīgi sadalīti. Sk., piem., attēlā, kur parādīts, kā noteikta tilpuma blīvuma vērtības ir atkarīgas no šajā tilpumā mērīšanas procesā izdalītā tilpuma elementa lieluma. Abscisu ass – šķidruma tilpums, uz kuru attiecas mērījumi, ordinātu ass – šķidruma blīvuma vērtība. 1 – “lokālā” šķidruma blīvuma vērtība. 2 – izmaiņas, kas saistītas ar blīvuma telpisko sadalījumu. 3 – izmaiņas, kas saistītas ar molekulu fluktuācijām.



[35], 22.lpp.

1.2. IDEĀLS UN VISKOZS ŠĶIDRUMS

1.2.1. Ideāls šķidrums un ideāla gāze

Gāzi daudzviet uzskata kā šķidruma robežgadījumu, līdz ar to ar jēdzienu *šķidrums* dažreiz saprot vai nu šķidrumu vai gāzi. Šķidrumam un gāzēm kustoties, rodas berzes spēki (sk. 3.1.3. Šķidrums kustībā; ar to saistītie spēki). Ja šie spēki ir nelieli, tos var neievērot, tad aplūkojamo gāzi via šķidrumu sauc par ideālu. Netiek ņemts vērā enerģijas disipācijas process, kas var notikt tekošā šķidrumā iekšējās berzes (viskozitātes) dēļ un siltumkustības dēļ. Protams, ideāli šķidrumi reāli nepastāv. Šādu idealizāciju var pieņemt, ja deformāciju izmaiņas ātrumi ir pietiekoši mazi.

ideāls šķidrums

Mehānikā par ideālu uzskata nesaspiežamu (sk. 5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums) un neviskozu (t.i. šķidrumu, kurā pie jebkuras kustības nerodas iekšējās berzes spēki, kā tangenciālie, tā arī normālie) šķidrumu, kurā var darboties tikai normālspiediens p (sk. 6.3.2. Spiediens šķidrumos), ko viennozīmīgi nosaka saspiešanas pakāpe un temperatūra. Šādu šķidrumu apraksta šķidruma stāvokļa vienādojums (sk. 1.3.1. Šķidruma stāvokli aprakstošie lielumi) ne tikai miera stāvoklī, bet arī jebkurā kustībā.

ideāla gāze

Ideālu gāzi veido termiskā kustībā esošas vielas molekulas, kuras tiek uzskatītas par elementāri mazām nemainīgām lodītēm, kas neatrodas mijiedarbībā cita ar citu.

1.2.2. Viskozs šķidrums

Ja šķidrumam kustoties rodas iekšējie berzes spēki, tad tādu šķidrumu sauc par viskozu šķidrumu.

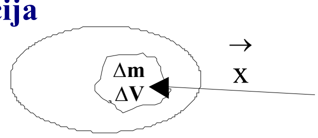
1.3. MATEMĀTISKAIS APRAKSTS

1.3.1. Šķidruma stāvokli aprakstošie lielumi

Matemātiski šķidruma stāvokli apraksta ar šķidruma ātrumu aprakstošas funkcijas palīdzību un jebkuriem diviem tā termodinamiskiem lielumiem, piemēram, spiedienu p un. blīvumu ρ. Kā zināms, jebkuru termodinamisko lielumu var noteikt izmantojot stāvokļa vienādojumu pēc jebkuru citu divu termodinamisko lielumu vērtībām (šai gadījumā izvēlēti ir spiediens p un. blīvums ρ), tāpēc uzdevums ir ar pieciem lielumiem: jānoskaidro 3 ātruma komponentes, spiediens un blīvums.

Visi šie lielumi ir koordinātu Dekarta taisnleņķu koordinātu x_i un laika funkcijas. Tātad nepārtrauktas vides katru punktu jāvar raksturot ar rādiusvektora x_i koordinātēm kādā sākuma laika momentā.

Blīvuma funkcijas definīcija



Viens no nepārtrauktu vidi raksturojošiem lielumiem ir blīvums. Izdala kādu tilpuma elementu ΔV ar masu Δm. Šī elementa tilpumu tiecina uz 0 un iegūst: $\rho(\vec{x}) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$; kur $\vec{x} = x_i \cdot \vec{e}_i$; $\mathbf{e}_i$ – Dekarta taisnleņķa koordināšu sistēmas orti.

1.3.2. Kustības likums

Hidrodinamikā, atšķirībā no cietvielu mehānikas, netiek apskatīta ķermeņu kustība, bet gan daudzu daļiņu kopuma – kontīnuma kustība. Lai šādu kustību aprakstītu, nepieciešams uzrakstīt vienādojumu – kustības likumu. To iegūst, piemērojot II Ņūtona likumu nepārtrauktai videi (sk. 7. nodaļa). Lai to izdarītu, vispirms nepieciešams zināt katra nepārtrauktas vides elementa ātrumu un paātrinājumu. 2. nodaļā iegūsim šo lielumu izteiksmes nepārtrauktai videi.

2. ĀTRUMS UN PAĀTRINĀJUMS NEPĀRTRAUKTAI VIDE; KONVEKTĪVAIS ATVASINĀJUMS

2.1. LAGRANŽA PIEEJA.

2.1.1. Rādiusvektors Lagranža pieejā

Kustības likumus var izteikt **individuāli sekojot katrai daļiņai**. T.i., norādīt stāvokli šai daļiņai (daļiņas atšķiramas ar sākumstāvokli $\mathbf{x}_o$) katrā laika momentā t: $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$. Tādējādi ir noteiktas visas šķidruma daļiņu trajektorijas. Ja šāda funkcija būtu zināmu, teorētiski varētu aprēķināt visu interesējošo. Šāds attēlojums ir viennozīmīgs, t.i. nevar gadīties, ka daļiņas, kurām laika momentā t_1 ir dažādi $\mathbf{x}_o$, pēc kāda laika vienlaicīgi nokļūtu vienā un tajā pašā punktā. Tātad vienmēr ir iespējams uzrakstīt apgrieztu funkciju, t.i. zinot, kur tilpuma elements atrodas kādā laika momentā, var uzzināt, kur tas atradies sākumā. Izmantojot šādu pieeju iegūtu ārkārtīgi lielu, nepārskatāmu un neaptveramu daudzumu skaitļu, kas aprakstītu kustību, līdz ar to tas ir praktiski neizmantojams variants. Praksē pielieto citu apraksta metodi – Eilera pieeju.

2.1.2. Ātruma definīcija Lagranža pieejā

Lagranža pieejā ātrums daļiņai ar noteiktu sākumstāvokli $\mathbf{x}_o$: $\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\vec{x}_o} = \vec{v}(\vec{x}_0, t)$.

2.1.3. Paātrinājuma definīcija Lagranža pieejā

Lagranža pieejā paātrināums daļiņai ar noteiktu sākumstāvokli $\mathbf{x}_o$: $\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}_o} = \vec{a}(\vec{x}_0, t)$

2.2. EILERA PIEEJA

Eilera pieejā visus nepieciešamos lielumus izsaka caur lielumiem, kas attiecas **uz telpā nekustīgu punktu**. Norāda dažādu šķidruma daļiņu, kuras dažādos laika momentos iet caur vienu un to pašu telpas punktu, ātrumu lielumus un virzienus.

2.2.1. Ātrums Eilera pieejā

No Lagranža pieejā ieviestā $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$ jāizsaka $\mathbf{x}_o$ kā funkcija no $\mathbf{x}$. Līdzīgi izsaka vides kustības ātrumu: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}_0(\vec{x}, t), t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Ātruma funkcija tātad ir funkcija dotajā punktā no punkta rādiusvektora un laika.

2.2.2. Paātrinājums Eilera pieejā

Tagad katrā punktā ir uzdots šķidruma kustības ātrums. Zinot šo ātrumu sadalījumu telpā, nepieciešams uzrakstīt materiāla elementa paātrinājumu. Paātrinājums Lagranža pieejā ir definēts tikai fiksētam šķidruma elementam. Tādēļ nav jēgas pēc Lagranža pieejas to atrast noteiktā punktā, jo šajā punktā dažādos laika brīžos atradīsies dažādi tilpuma elementi (ķermeņi), tātad, paātrinājumu atrodot, ir jāseko konkrētai daļiņai. Katrā laika momentā konkrētajā punktā nonāk noteikta materiālā daļiņa - kāda, to nosaka pēc $\mathbf{x}_o$.

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}_o} = \vec{a}(\vec{x}_0, t)$$

$\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}_o} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{x}_0(\vec{x}, t), t)$. Šajā ātruma formulā laiks ieiet gan tiešā veidā, gan ar saliktas funkcijas palīdzību.

Atvasinot ātruma funkciju tieši pēc laika (pie konstanta **x**), iegūst: $\left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{x}}$. Turpmāk īpaši uzsvērt to, ka **x** šeit ir konstants, nav nozīmes, jo tieši to jau norāda parciālā atvasinājuma zīme ∂.

Atvasinot netieši: **x** raksturojas ar koordinātēm x_i, tādēļ iegūst: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{\vec{x}_o}$.

Paātrinājuma izteiksme

Atceroties Ātruma definīcija Lagranža pieejā (netiešā atvasinājumā esam ieguvuši ātruma i-to komponenti), galu galā iegūst: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$.

Paātrinājuma izteiksme ar operatoru Nabla

Iegūto formulu pārraksta citā veidā, ievedot operatoru Nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1};\frac{\partial}{\partial x_2};\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ jeb $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Redzams, ka $v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$ ir ātruma vektora un operatora Nabla skalārais reizinājums un operators Nabla iedarbojas uz ātruma vektoru. Tātad iegūta paātrinājuma izteiksme: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$.

2.3. KONVEKTĪVAIS ATVASINĀJUMS.

Atvasinājumu, kas ir $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)$ formā, sauc par konvektīvo atvasinājumu. Tas parāda, kā mainās ātrums kustošam materiālam elementam, kas pārvietojas no viena punkta uz citu materiālā telpā. Redzams, ka šī ātruma izteiksme ir nelineāra.

2.3.1. Paātrinājuma nelinearitāte

Tātad nepārtrauktai videi paātrinājums no ātruma ir atkarīgs **nelineāri**! Palielinot ātrumu 10 reizes, paātrinājums nepalielināsies 10 reizes. Nesaspiežamiem šķidrumiem līdz ar šīs izteiksmes izvedumu izpausmju nelinearitātes jau ir iegūts. Šī nelinearitāte arī paskaidro dažādās turbulences un virpuļu rašanās parādības. Pateicoties tieši šim faktam tiek sarakstītas neskaitāmas briesmīgi biezas grāmatas...

3. SPĒKI NEPĀRTRAUKTĀ VIDĒ

3.1. SPĒKU IEDALĪJUMS

3.1.1. Tāldarbības jeb tilpuma jeb masas spēki

Piem., smaguma spēks, kas ļoti lēnām samazinās, attālinoties mijiedarbojošamies ķermeņiem, bet tomēr šis spēks ir nozīmīgs šķidrumiem raksturīgajos izmēros. Tādi spēki spēj iedarboties uz visiem šķidruma elementiem un to rezultējošais spēks ir proporcionāls elementa tilpumam un līdz ar to arī masai. Kā tāldarbības spēkus būtu vēl jāmin arī inerces un elektromagnētiskos spēkus, kuriem ir būtiska nozīme attiecīgi rotējošos un elektriski uzlādētos šķidrumos. Rezultējošo tāldarbības spēku, kas laika momentā t darbojas uz šķidrumu ar tilpumu δV, kas aptver punktu ar rādiusvektoru r, var pierakstīt: $F(r,t)\rho \cdot \delta V$

3.1.2. Tuvdarbības jeb molekulārie spēki

Tie ir tādi, kas strauji samazinās, palielinoties attālumam starp mijiedarbojošamies elementiem. Tie ir tieši saistīti ar vielas uzbūvi un ievērojami tikai tad, ja attālumi starp elementiem ir salīdzināmi ar starpmolekulārajiem attālumiem. Tos lielākoties izsauc kustības daudzuma pārnese caur elementu kopīgo robežu, kas norit pateicoties molekulu kustībai caur šo robežu, kā arī molekulu svārstību kustība paralēli robežai un molekulu mijiedarbība abpus robežai. Tuvdarbības spēki ir atkarīgi no mijiedarbojošos elementu saskares virsmas laukuma, bet nav atkarīgi no to tilpuma. Materiālo elementu apņemošā tilpuma virsmas dažādas daļas ir dažādi orientētas telpā, tāpēc vispirms jānoskaidro plakana materiālā elementa tuvdarbības spēku izteiksme.

3.1.3. Iekšējie berzes spēki

Ja šķidrums atrodas kustībā, tad kopā ar normālajiem spēkiem, tajā, ja šķidrums nav ideāls (sk. 1.2.1. Ideāls šķidrums), starp šķidruma slāņiem, kas atrodas relatīvā kustībā, darbojas iekšējās berzes jeb viskozitātes spēki. Šie spēki ir vērsti gar slāņu saskares virsmu pretēji slāņu relatīvā ātruma virzienam, t.i. viskozitātes spēki, darbojoties uz diviem saskarē esošiem slāņiem, kas kustas ar dažādiem ātrumiem, cenšas palēnināt to slāni, kura ātrums ir lielāks, un paātrināt to slāni, kura ātrums ir mazāks.

Šie spēki ir tangenciālie spēki un tie nav nosakāmi pēc pašām deformācijām (nobīdēm), bet pēc to ātrumiem, t.i. deformāciju atvasinājumiem pēc laika. Tāpēc tos jāattiecina uz berzes spēku klasi. Kopā ar tangenciālajiem var eksistēt arī normālie vai tilpuma iekšējās berzes spēki. No parastā spiediena šie spēki atšķiras ar to, ka arī tie nosakāmi pēc deformāciju atvasinājumiem pēc laika, t.i. deformāciju ātruma. Šiem spēkiem ir būtiska loma ātros procesos, piem. īsu ultraskaņas viļņu izplatībā.

Rezultējošais spēks šķidrumam kustībā

Bez iekšējiem berzes spēkiem uz šķidrumā kustošu ķermeni no apkārtējās vides darbojas vēl arī normālspiediens (sk. 6.3.2. Spiediens šķidrumos). Rezultējošajam šo normālspēku vektoram ir komponente, kas vērsta pretēji ķermeņa kustības virzienam. Pie lieliem ātrumiem tā daudzkārt pārsniedz pretestības spēkus, ko rada viskozā berze. Par berzes spēku šai gadījumā sauc summāro viskozo spēku un normālspiediena spēku vektoru. Pie nelieliem ātrumiem šis berzes spēks proporcionāls ātruma pirmajai pakāpei.

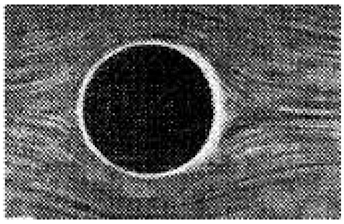
3.2. PAMATOJUMS, KA NEPĀRTRAUKTĀ VIDĒ DARBOJAS SPĒKI.

3.2.1. Materiāla elementa paātrinājums stacionārā plūsmā

No paātrinājuma formulas Eilera pieejā redzams, ka arī tad, ja šķidruma kustība ir stacionāra, t.i. plūsmas ātrumu lauks laikā nemainās, materiālajam elementam var būt paātrinājums!

Materiālā elementa kustībā no viena punkta uz otru kustības paātrinājumu raksturo loceklis $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ kas var nebūt nulle arī tad, ja $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ir vienāds ar nulli.

3.2.2. Piemērs - sfēras aptecēšana


[35]

Attēlā vērojamā plūsmas aina ir stacionāra, bet pēc plūsmas līnijām redzams, ka ātrumi ir mainīgi.

Ja sfēru aptek šķidrums, tad pret sfēras centru tas ir pilnībā nobremzēts, savukārt augšpus un lejpus centram ātrumam jāpieaug (Bernulli likums: $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = Const$), tātad, pārvietojoties no viena punkta uz otru, šķidruma elementam mainās ātrums.

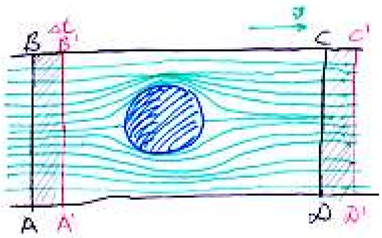
Ātruma maiņu laikā raksturo paātrinājums, tātad jāsecina, ka attiecīgie šķidruma elementi kustas paātrināti. Ja ir paātrinājums, tad darbojas arī spēki. Šiem spēkiem un to izmaiņai tad arī ir jāatrod matemātisks apraksts, t.i. jāraksta kustības vienādojums. Lai to varētu izdarīt, nepieciešams noteikt, kā mainās tilpuma elements (4.nodaļa), tā blīvums (5.nodaļa), kā arī noteikt spriegumus, kas darbojas šķidrumā (6.nodaļa).

Dalambēra paradokss jeb pierādījums viskozitātes eksistencei [35]

Apraksts

Apskata ideāla (sk. ideāls šķidrums), nesaspiežama šķidruma bezvirpuļu stacionāru kustību. Pieņemsim, ka gadījumā, kad nav šķidrumā ievietotu ārēju ķermeņu, šķidrums tek paralēlā plūsmā. Ja tajā ievieto ķermeni, tad tas izkropļo plūsmu. Bet pietiekoši tālos gabalos no ķermeņa plūsma atkal būs paralēla. Ja neilgi pēc ķermeņa ievietošanas plūsmas līnijas būs mainīgas, tad pēc zināma laika plūsma nostabilizēsies un plūsmas līnijas laikā saglabās savu izskatu. Pieņemsim, ka šķidrums plūst taisnvirziena caurulē.

Šķidruma daļas impulsa konstantums



Šķidruma nesaspiežamības dēļ plūsmas līnijas tālu no ķermeņa ir paralēlas caurulei un to ātrums šajā apgabalā ir visur vienāds. Pēc Bernulli likuma $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = Const$ seko, ka būs vienādi arī spiedieni. Apskatīsim šķidruma daļu ABCD, kurā atrodas ķermenis. Pieņemts, ka griezumi AB un CD atrodas tālu no ķermeņa, līdz ar to caur tiem plūsma tek paralēli caurulei. Pēc neilga brīža šī šķidruma daļa atradīsies stāvoklī A'B'C'D'. Pie tam tās impulss paliks nemainīgs. No plūsmas ātrumu vienādības "bezgalībā" seko, ka impulsi šķidruma apgabalos ABA'B' un CDC'D' arī ir vienādi. Tātad – aptekot ķermeni šķidruma impulss neizmainās.

Rezultējošais spēks uz šķidruma daļu

Tātad rezultējošais spēks, kas darbojas uz apskatāmo šķidruma daļu plūsmas virzienā, ir vienāds ar nulli. Bet šis spēks sastāv no spiedienu spēku starpības uz virsmām AB un CD un no spēka F_x', ar kuru ķermenis darbojas uz šķidrumu (caurules sieniņu spiedienu var neņemt vērā, jo tam nav komponentes plūsmas virzienā). Spiediena spēki uz plaknēm AB un CD viens otru līdzsvaro, tāpēc $F_x'=0$. Tātad nulle ir arī frontālās pretestības spēks F_x. Šis izvedums ir spēkā jebkura izmēra caurulei, un arī tad, ja caurules vispār nav, bet plūsma ir taisnvirziena.

Dalambēra paradokss

Secinājumi no iepriekš izvestā

Tātad stacionārā ideāla nesaspiežama šķidruma plūsmā vai ķermenim vienmērīgi kustoties nekustīgā šķidrumā, frontālās pretestības spēks ir 0.

Situācija reālā šķidruma plūsmā

Tomēr šķidrumam plūstot pa horizontālu nemainīga šķērsgriezuma cauruli, spiediens, ko eksperimentā uzrāda manometriskās caurulītes dažādās caurules vietās, nav vienāds, kā tam vajadzētu būt saskaņā ar Bernulli vienādojumu $\frac{\rho v^2}{2}+\rho g h+p=\mathscr{C}$, bet nepārtraukti samazinās šķidruma plūsmas ātruma $\vec{v}$ virzienā. Spiediens p_1, kas darbojas kustības virzienā uz noteikta šķidruma tilpuma aizmugurējo virsmu S_1, ir lielāks par spiedienu p_2, kas darbojas pretējā virzienā uz šī šķidruma tilpuma priekšējo virsmu S_2. Kaut gan pastāv spiediena spēku starpība, tomēr šķidrums caurulē kustas bez paātrinājuma. No tā izriet, ka bez spiediena spēkiem uz doto kustībā esošo šķidruma tilpumu darbojas arī šķidruma ātrumam pretējā virzienā vērsti viskozitātes spēki, kuri kompensē spiediena spēku starpību.

Vispārīgā gadījumā viskoza šķidruma plūsmai Bernulli vienādojumu nevar pielietot, jo darbojas viskozitātes spēki, kuri šajā vienādojumā nav ievēroti. Viskozitātes spēku pārvarēšanai tiek patērēta daļa no plūstošā šķidruma enerģijas, kas parasti pārvēršas molekulu termiskajā enerģijā.

Dalambēra paradoksa esamība uzskatāmi parāda, ka nosakot frontālo pretestību, ko jūt ķermenis vienmērīgā kustībā, šķidrumu nedrīkst uzskatīt par ideālu.

Spēku momenta vienādība ar 0.

Dalambēra paradoksa izvedums attiecas tikai uz frontālo pretestību F_x, bet ne uz cēlējspēku F_y un spēku momentu M, ar ko šķidruma plūsma darbojas uz ķermeni. Moments M pret masas centru ir 0 tikai tad, kad ķermenis ir simetrisks un ir simetriski novietots attiecībā pret straumi. Ja tāds nosacījums neizpildās, tad tā nav. Aptekot ķermeni visa plūsma novirzās sāņus, t.i. virzienā, kas perpendikulārs neierosināta šķidruma plūsmas virzienam. Tas izsauc šķidruma kustības daudzuma momenta izmaiņu un rada spēku momentu, kas darbojas uz ķermeni. Rezultātā moments griež ķermeni, kamēr netiek līdzsvarots un plūsma ap ķermeni ir atkal stacionāra.

Dalambēra paradoks nevienmērīgi kustošam ķermenim.

Tādam Dalambēra paradokss nerodas, jo ar kustīgu ķermeni ir saistīta zināma šķidruma masa, ko tas aizvelk sev līdzi – piesaistītā masa. Paātrinot ķermeni paātrinās arī piesaistītā masa. Tāpēc paātrinājuma piešķiršanai ķermenim šķidrumā vajadzīgs lielāks spēks, nekā tāda paša paātrinājuma piešķiršanai ārpus šķidruma. Tas arī nozīmē, ka šķidrums izrāda pretestību ķermenim, kas tajā kustas paātrināti.

4. NEPĀRTRAUKTAS VIDES TILPUMA ELEMENTA IZMAIŅA.

4.1. PAR TILPUMA IZMAIŅAS IEMESLIEM UN SVARĪGUMU

4.1.1. Kāpēc svarīgi zināt tilpuma izmaiņas

Zinot, kas notiek ar tilpumu, varēs pateikt, kas notiek ar nepārtrauktas vides blīvumu (nepārtrauktības vienādojums), kas ir viens no pašiem svarīgākajiem jautājumiem.

Blīvuma izmaiņu noteikšanai izmanto masas saglabāšanās likumu, uzskatot, ka materiālā elementa masa paliek nemainīga un pēta, kā mainās tilpums, ja vide kustās.

4.1.2. Pamatojums, kāpēc tilpuma izmaiņas vispār rodas

Ja vide pārvietojas ar konstantu ātrumu, materiālais elements pārvietojoties nemainīs formu. Savukārt, ja kustība ir nehomogēna, tad ātruma vektors dažādos telpas punktos ir dažāds, tāpēc ar apskatāmo tilpuma elementu V kaut kas notiks.

4.2. TILPUMA ELEMENTA MATEMĀTISKAIS APRAKSTS

4.2.1. Tilpuma elements sākummomentā

Pieņem, ka sākummomentā materiālais elements ir taisnstūra paralēlskaldņa formā, tā šķautņu garumi ir Δx_1, Δx_2, Δx_3 un tās ir vērstas Dekarta koordinātu asu virzienos. Tāpēc $\Delta V=\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$.

4.2.1. Vienādojumi paralēlskaldņa šķautnēm

Kas notiks ar tilpuma elementu, ja punkti uz x_i asīm pārvietosies ar dažādiem ātrumiem?

Tāda punkta, kas atrodas uz paralēlskaldņa šķautnes, kustību var aprakstīt ar rādiusvektora vienādojumu. Tātad apskatāmais punkts no **x** pēc laika momenta Δt nonāks punktā **x'**: $\mathbf{x}' = \mathbf{x}+\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\Delta t$. Šis vienādojums ir rakstīts ar precizitāti līdz Δt pirmajai kārtai (piem., salīdzinot ar formulu $\mathbf{s}=\mathbf{v}t+\mathbf{a}t^2/2$).

Vienādojums punktam uz šķautnes x_1 ass virzienā

$$\mathbf{x}' = x_1 \cdot e_1 + \mathbf{v}(x_1, 0, 0, t) \text{ (ja } x_2, x_3=0)$$

Redzam, ka **x'** punkta rādiusvektors izsakās kā x_1 funkcija. Bet ja punkta rādiusvektors ir uzdots kā funkcija no viena mainīgā – tā ir līnijas funkcija. Tātad šķautne pārvietojas pa līniju. Šo līniju var raksturot ar pieskares vektoru.

Pieskares vienādojumi

Pieskares vienādojumi atbilstošo šķautņu punktu pārvietojumu līnijām.

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\partial x'}{\partial x_1} = \vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1}\Delta t; \quad \vec{\tau}_2 = \frac{\partial x'}{\partial x_2} = \vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2}\Delta t; \quad \vec{\tau}_3 = \frac{\partial x'}{\partial x_3} = \vec{e}_3 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3}\Delta t$$

Vektori τ_i nav vairs obligāti perpendikulāri, kā tas bija ar vektoriem e_i, jo parādījies loceklis $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\Delta t$. Līdz ar to izveidojas "paralēlskaldnis", kura šķautnes ir līklīnijas.

Vienādojumi šķautnēm jeb paralēlskaldņa malu garumiem

Ja Δx_i paņem pietiekoši mazus, tad var uzskatīt, ka līnijas virziens sakrīt ar pieskares vektora virzienu koordinātu sākumpunktā. Tātad līniju vienādojumi, ko veido definētās šķautnes ir: $\vec{\tau}_1 \Delta x_1$; $\vec{\tau}_2 \Delta x_2$; $\vec{\tau}_3 \Delta x_3$. Šie vienādojumi definē paralēlskaldņa malu garumus. Tajos ietilpstošie Δx_i ir skalāri lielumi, kurus , izpildot vektoriālas operācijas, var iznest pirms iekavām.

4.2.2. Paralēlskaldņa tilpums pēc laika Δt

Kā aprēķināt paralēlskaldņa tilpumu pēc laika Δt

Nepieciešams iegūt, kāds būs paralēlskaldņa tilpums pēc laika Δt. To var iegūt ar skaldņu vektoru jaukto reizinājumu. Tātad pēc laika Δt paralēlskaldņa tilpums būs: $\Delta V' = \vec{\tau}_1 \Delta x_1 \cdot \vec{\tau}_2 \Delta x_2 \cdot \vec{\tau}_3 \Delta x_3$. $\Delta V' = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \cdot \vec{\tau}_1 \left[\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3\right]$. Redzams, ka $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ ir paralēlskaldņa sākotnējais tilpums. Līdz ar to: $\Delta V' = \Delta V \cdot \vec{\tau}_1 \left[\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3\right]$. Šo izteiksmi jāaprēķina mazu Δt gadījumā.

Pieskares vektoru jauktā reizinājuma aprēķināšana

Aprēķina determinantu ar attiecīgajām vektoru komponentēm.

$$\vec{\tau}_1 \left[\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3\right] = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Delta t & \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\Delta t \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Delta t & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Delta t \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\Delta t & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\Delta t & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\Delta t \end{vmatrix}$$

. Šo determinantu var risināt tieši, atstājot locekļus ar precizitāti līdz Δt pirmajā pakāpē. Vienkāršāk ir izmantojot Liuvila teorēmu, ko pierāda statistiskajā fizikā.

-------------- Liuvila teorēma

Determinants ir tādu reizinājumu summa, kur katrs reizinātājs satur tikai vienu locekli no katras rindiņas un katras kolonas. Ja ir matrica nxn, tad reizinājumā ir n locekļi. Pie tam reizinājums tiek summēts ar zīmi, ko nosaka permutāciju skaits. Piem., ja no pirmās rindiņas reizinājumā ņem otro locekli, bet no otrās rindiņas – pirmo, tad to var uzrakstīt: $\begin{matrix} 12\ldots n \\ 21\ldots n \end{matrix}$. Redzams, ka šeit nepieciešama viena transpozīcija, lai no pirmās rindiņas iegūtu otro. Ja sanāk nepāra transpozīciju skaits, locekli ņem ar "-" zīmi. Ja pāra – ar "+" zīmi.

-------------- Liuvila teorēmas pierādījums.

Ja attiecīgais reizinājums summā satur vienu nediagonālu matricas locekli, piem. a_{ik} ($i \neq k$), tad ir skaidrs, šim te reizinājumam jāsatur vēl vismaz viens nediagonāls loceklis, jo no i-tās rindiņas locekli a_{ii} nevar ņemt, jo jau ir paņemts a_{ik} un arī no k-tās rindiņas ir tas pats a_{ik}, tāpēc nevar ņemt locekli a_{kk}. Ja matricā ir n rindiņas, tad var būt n diagonāli locekļi. Reizinājumā jābūt n locekļiem. Tātad katrā reizinājumā ir pāra skaits diagonālu un nediagonālu locekļu.

Paralēlskaldņa tilpums pēc laika Δt

Saskaņā ar Liuvila teorēmu visu nediagonālo locekļu reizinājumus var atmest, jo tie būs otrās kārtas mazi lielumi (reizinājumā būs Δt^2, bet aprēķini ir ar precizitāti Δt), no diagonālo locekļu reizinājuma atmetot otrās kārtas mazos lielumus iegūst:

$$\left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta t\right)\left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Delta t\right)\left(1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\Delta t\right) \cong 1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\Delta t =$$

$$= 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Delta t_i = 1 + \operatorname{div}\vec{v} \cdot \Delta t$$

Tātad, atceroties iepriekš izvesto, $\Delta V' = \Delta V \cdot \vec{\tau}_1 \left[\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3\right] = \Delta V \cdot \left(1 + \operatorname{div}\vec{v} \cdot \Delta t\right)$.

4.2.3. Tilpuma elementa izmaiņa laikā

Pēdējā iegūtā izteiksmē pārnes ΔV uz otru pusi un izdala ar Δt. Iegūst: $\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta t} = \Delta V \operatorname{div}\vec{v}$.

Tā kā aprēķinus veicam pieņemot, ka $\Delta t \to 0$ un $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta t} = \frac{d\Delta V}{dt}$, tad $\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta V \operatorname{div}\vec{v}$.

Šī formula ir iegūta izmatojot tikai kinemātikas likumsakarības.
Ja $\Delta V=0$, tad dotais punkts tilpumu nemaina, tieši tādēļ formulas labajā pusē ir palicis ΔV.
Izmantojot tikko iegūto tilpuma elementa izmaiņu laikā, var izvest

5. NEPĀRTRAUKTĪBAS VIENĀDOJUMS.

5.1. KĀ IEGŪT NEPĀRTRAUKTĪBAS VIENĀDOJUMU

Zinot tilpuma elementa izmaiņu laikā, tālāk izmanto masas saglabāšanās likumu, lai iegūtu vienādojumu blīvumam, t.i. nepārtrauktības vienādojumu. Tādā veidā iegūs pirmo nepārtrauktas vides vienādojumu, kas aprakstīs, kā mainās nepārtrauktas vides blīvums, ja sistēma kustās.

5.2. NEPĀRTRAUKTĪBAS VIENĀDOJUMA IZVEDUMS

5.2.1. Masas izmaiņa

No blīvuma definīcijas izriet, ka $\Delta m=\rho\Delta V$.

Masas izmaiņa laikā elementam, ko apraksta ar Lagranža koordinātēm

Ja seko atsevišķa materiālā elementa masas izmaiņām laikā, tad skaidrs, ka šī konkrētā tilpuma elementa masa laikā nevar mainīties. Tātad materiālo elementu var raksturot ar Lagranža koordinātēm $\mathbf{x}_o$, t.i. $\frac{\partial}{\partial t}\Delta m\Big|_{\vec{x}_0=\mathrm{Const}}=0$.

Masas izmaiņa laikā Eilera pieejā

Tātad aprakstot kustību Eilera pieejā, izteiksmei $\Delta m=\rho\Delta V$ konvektīvi jāatvasina, jo sekojam fiksētam materiālajam elementam.

Atvasinot iegūst: $0=\frac{d\rho}{dt}\Delta V+\rho\frac{d}{dt}\Delta V$.

5.2.2. Nepārtrauktības vienādojums

Nepārtrauktības vienādojuma iegūšana

Izmantojot masas izmaiņas laikā izteiksmi un iepriekš izvesto tilpuma elementa izmaiņu laikā, iznesot ΔV pirms iekavām iegūst: $\Delta V\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)=0$. Tā kā formulas tika izvestas patvaļīgam tilpuma elementam ΔV, tad vienādība visos gadījumos var izpildīties tikai tad, kad iekavās esošais ir vienāds ar nulli.

Nepārtrauktības vienādojums ar neizvērstu blīvuma konvektīvo atvasinājumu.

Līdz ar to iegūts nepārtrauktības vienādojums $\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0$.

Nepārtrauktības vienādojums ar konvektīvi atvasinātu blīvumu

Blīvumu atvasina konvektīvi, tad iegūst: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\rho+\rho\cdot\mathrm{div}\vec{v}=0$. Šo izteiksmi var pārveidot, izmantojot vektoralgebras likumsakarības.

Vektoralgebras likumsakarība

Nabla ir gan diferenciāls operators, kurš stāv pa kreisi no tā lieluma, uz kuru darbojas, gan vektoriāls operators, tāpēc jāizmanto vektoralgebras sakarības. Diferencējot skalāra un vektoriāla lieluma reizinājumu, ar operatoru Nabla vispirms iedarbojas uz pirmo, tad uz otro reizinātāju: $\nabla(u\cdot\vec{a})=\nabla\left(\overset{\downarrow}{u}\cdot\vec{a}\right)+\nabla\left(u\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}}\right)$. No pirmā saskaitāmā iegūst: $\mathrm{gra}\partial u\cdot\mathbf{a}$. Tā kā šis ir vektoru skalārs reizinājums, tad drīkst mainīt reizinātājus vietām un rakstīt: $\mathbf{a}\cdot\mathrm{gra}\partial u$. Otrais saskaitāmais ir vektora Nabla skalārs reizinājums ar **a**. Savukārt vektors **a** tiek reizināts ar skaitli. Šo skaitli drīkst iznest pirms skalārā reizinājuma. Iegūst: u·div**a**. Līdz ar to $\nabla(u\cdot\vec{a}) = \vec{a}\cdot \mathrm{gra}\partial u + u\cdot \mathrm{div}\vec{a}$

Nepārtrauktības vienādojuma pieraksts, izmantojot vektoralgebru

Attiecīgi viegli pamanīt, ka izteiksmi $\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho + \rho\cdot \mathrm{div}\vec{v} = 0$ var pārveidot kā $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0$. Redzams, ka tad, ja blīvums ir telpā nemainīgs, to var ņemt pirms diverģences zīmes kā konstanti.

-------------- Šķidruma plūsmas blīvums

Pierakstu var saīsināt, ieviešot jēdzienu šķidruma plūsmas blīvums: **j** = ρ·**v**: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$

Nepārtrauktības vienādojums tenzorālā veidā

Izteiksmi var pārrakstīt arī tenzorālā veidā: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$

5.2.3. Nepārtraukt̄ības vienādojuma izvedums, izmantojot Gausa-Ostrogradska teorēmu ([15], 14.lpp.)

Aplūkosim kādu telpas tilpumu V_o. Tajā šķidruma daudzums (masa) ir $\int \rho dV$, integrēšana jāveic apgabalā V_o. Caur virsmas elementu d**S**, kas aptver doto tilpumu V_o, laika vienībā iztek ρ**v**d**S** šķidruma; vektors d**S** pēc absolūtā lieluma ir vienāds ar virsmas laukuma elementa laukumu un vērsts tā ārējās normāles virzienā. Tad ρ**v**d**S** ir pozitīvs, ja šķidrums iztek no tilpuma. Tātad no apskatāmā tilpuma pavisam izplūst $\oint \rho\vec{v}d\vec{S}$. Šo virsmas integrāli pēc Gausa-Ostrogradska teorēmas pārveido integrālī pēc tilpuma: $\oint \rho\vec{v}d\vec{S} = \int \mathrm{div}(\rho\vec{v})dV$.

No otras puses šķidruma masas samazināšanos tilpumā V_o var uzrakstīt kā $-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV$.

Pielīdzinot izteiksmes iegūst: $\int\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v}\right)dV = 0$.

Šai vienādībai jāizpildās jebkuram tilpumam, tāpēc zemintegrāļa izteiksmei jābūt vienādai ar nulli: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v} = 0$.

5.3. *VAI IEGŪTĀ VIENĀDOJUMU SISTĒMA IR NOSLĒGTA?*

Uzrakstot nepārtrauktības vienādojumu, tajā ir iesaistīti 4 nezināmi lielumi, t.i. trīs ātruma komponentes un blīvums. Tātad, lai iegūtu noslēgtu sistēmu, vēl jāiegūst vienādojumi ātrumiem (7.nodaļa).

5.4. *LOKĀLIE SAGLABĀŠANĀS LIKUMI.*

Ja likums ir $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}u\vec{a} = 0$ formā, tad attiecīgā parametra u saglabāšanās likums izpildās tikai globāli, lokāli skatoties u var "aiziet" vai arī "pienākt". Sk. sīkāk 9.1.3. nodaļu.

5.5. NEPĀRTRAUKTĪBAS VIENĀDOJUMS ĪPAŠOS GADĪJUMOS

5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums

Ja šķidrums ir nesaspiežams, t.i. tā blīvums ir laikā nemainīgs, tad nepārtrauktības vienādojums $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$ stipri vienkāršojas: $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

5.5.2. Nesaspiežams šķidrums ar telpā nemainīgu blīvumu.

Ja šķidrums ir ne tikai nesaspiežams, bet tā blīvums ir nemainīgs arī telpā, tad nepārtrauktības vienādojums vienkāršojas vēl vairāk: $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

6. TUVDARBĪBAS SPĒKI ŠĶIDRUMĀ

6.1. KAS IR SPRIEGUMS

6.1.1. Mijiedarbības starp tilpuma elementiem

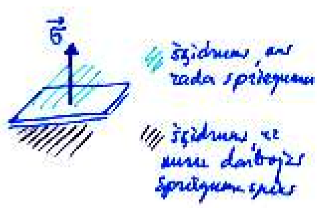
Lai atrastu spēkus, kādi darbojas nepārtrauktā vidē, jāatbild uz jautājumu, kā aprakstīt mijiedarbību starp dažādiem nepārtrauktas vides materiālajiem elementiem. Izsaka hipotēzi, ka mijiedarbība nepārtrauktā vidē notiek tikai starp tiem materiālajiem elementiem, kas ir tiešā savstarpējā kontaktā, t.i. tiek apskatīti tuvdarbības spēki un tiek izslēgti tāldarbības spēki. Iekšējos spriegumus tātad nosaka molekulārie spēki. Spriegumu teorijā visbūtiskākais ir tas apstāklis, ka molekulārajiem spēkiem ir ļoti neliels darbības rādiuss. Šie spēki izplatās ap tos radošajām daļiņām tikai starpmolekulāros attālumos. Bet spriegumu teorijā kā makroskopiskā teorijā tiek apskatīti tikai tie attālumi, kas lieli salīdzinājumā ar starpmolekulāriem. Tāpēc molekulāro spēku darbības rādiusu spriegumu teorijā jāuzskata par 0. Tāpēc var uzskatīt, ka iekšējos spriegumus radošie spēki ir tuvdarbības spēki, kas tiek nodoti no katra punkta tikai tam tuvākajam. No tā seko, ka spēki uz kādu apskatāmo tilpuma daļu no to aptverošās daļas darbojas tikai ar tās virsmas palīdzību. Tas vairs tā nav gadījumā, ja līdz ar deformāciju veidojas makroskopiski elektriskie lauki.

6.1.2. Kā rodas iekšējie sprieguma spēki

Nedeformētā tilpuma elementā attālumus starp molekulām nosaka to siltumkustības līdzsvarstāvoklis. Pie tam visas ķermeņa daļas atrodas savstarpējā mehāniskā līdzsvarā. Tas nozīmē, ka apskatot šo tilpuma elementu, rezultējošais spēks uz to no citu daļu puses ir 0. Tilpuma elementam deformējoties, molekulu savstarpējais attālums mainās un līdzsvars tilpuma elementā tiek izjaukts. Rezultātā rodas spēki, kas tiecas tilpuma elementu atgriezt līdzsvara stāvoklī. Šie iekšējie spēki tiek saukti par sprieguma spēkiem. Ja ķermenis nav deformēts, tad iekšējo spriegumu nav.

6.1.3. Lokālais spriegums

Tā kā mijiedarbība notiek tikai caur virsmu, tad jo lielāka kontaktvirsma, jo spēcīgāka mijiedarbība. Mijiedarbību raksturo ar spēku. Spēku uz laukuma vienību, ar kuru plakana šķidruma elementa viena virsmas puse iedarbojas uz otru virsmas pusi, sauc par lokālo spriegumu $\vec{\sigma}$.



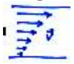
Tātad σ ir tāds spriegums, ko rada šķidrums no tās tilpuma elementa virsmas puses, uz kuru ir vērsta normāle **n**, uz tilpumu, kas atrodas tilpuma elementa virsmas pretējā pusē. Tas nozīmē, ka vektora σ normālā komponente, kas sakrīt ar normāles **n** virzienu, ir stiepes spēks. Summārais sprieguma spēks atrodams nosummējot šo lokālo spriegumu pa visu virsmu.

Lokālā sprieguma spēka funkcija ir nepāra

Tātad lokālo sprieguma spēku var pierakstīt kā $\vec{\sigma}(\vec{n},\vec{r},t)\Delta S$. Spriegums ir atkarīgs no virsmas normāles virziena.

Spēku, ar kuru otrā šķidruma virsma iedarbojas uz pirmo, protams, var pierakstīt kā $-\vec{\sigma}(\vec{n},\vec{r},t)\Delta S$. Tā kā to pašu var uzrakstīt kā: $-\vec{\sigma}(\vec{n},\vec{r},t)\Delta S=\vec{\sigma}(-\vec{n},\vec{r},t)\Delta S$, var secināt, ka sprieguma funkcijai σ jābūt nepāra funkcijai attiecībā pret virsmas normāli **n**. Šo sakarību pierāda, uzrakstot spēku balansu cilindriskam materiālam elementam un tiecinot uz nulli tā augstumu.

Spriegums dažādos virzienos

Ar sprieguma jēdziena ieviešanu sistēmas aprakstā būtiski uzlabojumi nav izdarīti. Vispārīgā gadījumā nav pamata uzskatīt, ka spriegums būs viens un tas pats uz dažādi orientētiem virsmas elementiem. Piemēram: ja ir  veida ātrumu sadalījums slānim, tad horizontālā virzienā ir vērsti noteikti spriegumi, bet ātruma virzienam perpendikulāri spriegumi ir vienādi ar nulli.

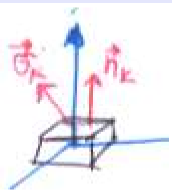
6.2. SPRIEGUMA TENZORS

6.2.1. Kāpēc vajadzīgs sprieguma tenzors

Aprakstīt sprieguma spēkus bezgalīgi dažādām orientācijām ir pilnīgi neiespējami. Tas nav arī nepieciešami. Ir formula, kas pilnībā ļauj šos spriegumus ērti aprakstīt – tas ir sprieguma tenzors. Ar tā palīdzību uz patvaļīgi orientētu virsmu spriegumus var izteikt ar sprieguma tenzora komponentēm.

Vispirms jāatrod sprieguma spēka atkarība no normāles virziena pret virsmas elementu, uz kuru tas darbojas.

6.2.2. Pamatspriegumi



Spriegums, kas darbojas uz virsmu ar normāli k-tās ass virzienā, var tikt izteikts: $\vec{\sigma}(\vec{e}_k) = \vec{\sigma}_k$ (orti vērsti k-tās ass virzienā un ir paralēli apskatāmās virsmas normālei).

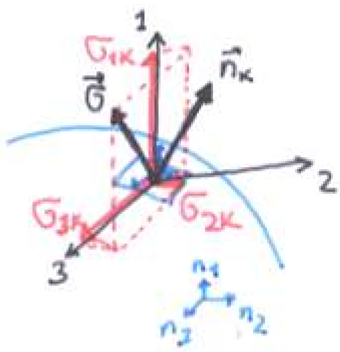
Katram no šiem sprieguma vektoriem ir 3 komponentes dotajā koordinātu sistēmā, t.i. $\vec{\sigma}_k = \sigma_{ik}\vec{e}_i$, kur i=1,2,3 raksturo atbilstošo sprieguma vektora komponenti, savukārt k raksturo apskatāmās virsmas elementa normālei paralēlo ortu.

Tātad σ_{ik} ir sprieguma, kas darbojas uz virsmas elementu ar normāli k-tās ass virzienā i-tā komponente.

6.2.3. Sprieguma tenzora izvedums patvaļīgi orientētam virsmas elementam

Teorēma

Sprieguma, kas darbojas uz patvaļīgā virzienā orientētu virsmas elementu ar normāli **n**, i-tā komponente var tikt izteikta: $\vec{\sigma}_i(\vec{n}) = \sigma_{ik} n_k$.



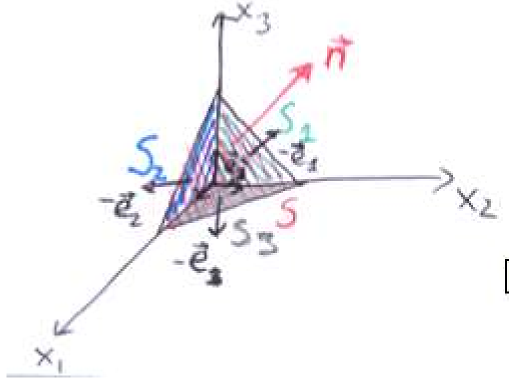
Ja šī teorēma ir spēkā, tad, lai izrēķinātu spriegumu, kas darbojas uz patvaļīgi orientētu virsmas elementu, pilnīgi pietiek zināt sprieguma tenzora σ_{ik} komponenšu vērtības. Tas ir otrā ranga tenzors, tātad tam jāatrod deviņu komponenšu vērtības.

Vēlāk, apskatot jautājumu par sprieguma tenzora simetriskumu, atklāsies, ka vairumā gadījumu tenzors ir simetrisks un tātad tam ir tikai 6 dažādas komponentes.

______Pierādījums

Dotajā punktā, kurā grib sakarību pierādīt, uzbūvē tetraedru, kura pamata normāle ir paralēla apskatāmās virsmas normālei, kas ir teorēmā dotās formulas kreisajā pusē.

Vispirms apskatīsim visus spēkus, kas darbojas tetraedra veida elementā ar tilpumu δV. Trijām šo elementu ierobežojošajām skaldnēm ir laukumi S_1, S_2, S_3 un attiecīgi ārējās normāles, kas vērstas asu vienībasvektoriem $\mathbf{e}_i$ pretējā virzienā $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_3$. Pamatam ir laukums S un normāle **n**.



_______Virsmas spēki, kas darbojas uz tetraedru.

Virsmas spēki uz šķidrumu tetraedrā darbosies caur visām tetraedra skaldnēm. Atkarību no **r** un t šeit neievēro, jo šie lielumi dotajā brīdī ir aptuveni vienādi visiem saskaitāmajiem.

-------------- Pret pamatu:

Spēks, kas darbojas pret tetraedra pamatu, kura normāle ir virzienā **n**. $F_{pamats} = \vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot S$

-------------- pret skaldnēm:

$F_{S_1} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_1) \cdot S_1$; $F_{S_2} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_2) \cdot S_2$; $F_{S_3} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_3) \cdot S_3$

-------------- Summārais virsmas spēks

$F_\Sigma = F_{pamats} + F_{S_1} + F_{S_2} + F_{S_3}$. Ņemot vērā sakarību: $\vec{\sigma}(-\vec{e}) = -\vec{\sigma}(\vec{e})$, iegūst:

$$F_\Sigma = \vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot S - \vec{\sigma}(\vec{e}_3) \cdot S_3 - \vec{\sigma}(\vec{e}_2) \cdot S_2 - \vec{\sigma}(\vec{e}_1) \cdot S_1.$$

_______Tetraedra raksturīgais izmērs

Tetraedru var raksturot ar raksturīgo izmēru L. Kā tādu var pieņemt kādas skaldnes izmēru. Pārējās skaldnes var izteikt, izmantojot šo lielumu L un leņķi pret to, jo tetraedrs ir telpiski fiksēts.

_______rezultējošā spēka izteiksme

Rezultējošais spēks **F**=ρ·ΔV·**a**= Σmasas spēki + Σvirsmas spēki. Masas spēki ir trešās kārtas mazs lielums, jo tie proporcionāli elementa tilpumam ($\sim L^3$), savukārt virsmas spēki proporcionāli laukumam S_i ($\sim L^2$). Tātad rezultējošā spēka izteiksmes locekļi ρ·ΔV·**a** un Σmasas spēki ir trešās kārtas mazi lielumi, savukārt Σvirsmas spēki – otrās kārtas mazs lielums. Tātad tiecinot raksturīgo izmēru L uz nulli, pirmie divi locekļi straujāk tieksies uz 0.

_______Sprieguma pret pamatu izteikšana ar spriegumiem pret tetraedra virsmām

Tādējādi rezultējošā spēka izteiksme var būt spēkā visos gadījumos tikai tad, ja summārie virsmas spēki $F_\Sigma = 0$.

Tad no summārā virsmas spēka izteiksmes, izdalot to ar pamata laukumu S, iegūst:

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{e}_3) \cdot \frac{S_3}{S} + \vec{\sigma}(\vec{e}_2) \cdot \frac{S_2}{S} + \vec{\sigma}(\vec{e}_1) \cdot \frac{S_1}{S}$$

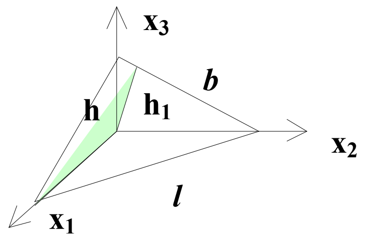
Šī sakarība izriet no priekšstata, ka visus elementus var savilkt uz 0, t.i. no priekšstata par nepārtrauktu vidi. Ja L tiecina uz nulli, tad visi lielumi summārā virsmas spēka izteiksmē ir koordinātu sākumpunktu raksturojoši lielumi.

-------------- Teorēma

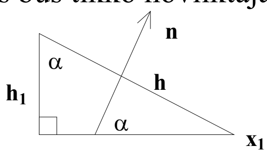
$\frac{S_i}{S} = \cos\angle = n_i$, kur $\cos\angle$ ir normāles projekcija uz i-to asi, tātad normāles i-tā komponente

-------------- Teorēmas pierādījums

Caur x_1 asi novelk plakni, kas perpendikulāra pamatam.



Tetraedra pamatnes normāles vektors būs tikko novilktajā plaknē. Izveidojas trijstūris:



Normāle ir perpendikulāra pret h, jo tā ir perpendikulāra tetraedra pamatam, bet $h \in$ pamatam. Leņķi ar savstarpēji proporcionālām malām ir vienādi. $h_l = h \cdot \cos\alpha = h \cdot n_l$;

$$S_l = \frac{1}{2} h_l \cdot b = \frac{1}{2} hb \cdot n_l = S \cdot n_l. \text{ Tātad } S_l/S = n_l$$

Spriegums uz patvaļīgi orientētu virsmas elementu

Ņemot vērā iepriekš izvesto sprieguma formulu un teorēmu, iegūst:

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{e}_3) \cdot n_3 + \vec{\sigma}(\vec{e}_2) \cdot n_2 + \vec{\sigma}(\vec{e}_1) \cdot n_1 = \vec{\sigma}(\vec{e}_k) \cdot n_k$$

Tādējādi sprieguma, kas darbojas uz brīvi orientētu plakanu šķidruma virsmas elementu, ko nosaka vienības normāles vektors **n**, komponente i ir saistīta ar tādu pašu sprieguma komponenti jebkurā no virsmas 3 ortogonālajiem plakanajiem elementiem vienā un tajā pašā stāvoklī tādā veidā, it kā tā būtu izteikta kā vektors ar ortogonālām komponentēm $\sigma(e_1)$, $\sigma(e_2)$, $\sigma(e_3)$.

Sprieguma izteiksme ar sprieguma tenzoru

Vektori **n** un σ nav atkarīgi no koordinātu sistēmas izvēles, tādēļ $\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}(\vec{e}_k) \cdot n_k$ izsaka kāda lieluma (i,k)-to komponenti, kura arī nav atkarīga no koordinātu sistēmas, t.i. izteiksme ir kāda otrā ranga tenzora komponente.

Atceroties $\vec{\sigma}(\vec{e}_k) = \vec{\sigma}_k$ (sk. 6.2.2. Pamatspriegumi), sprieguma vektora i-tā komponente ir uzrakstāma: $\vec{\sigma}_i(\vec{n}) = \vec{\sigma}_i(\vec{e}_k) \cdot n_k$ $\vec{\sigma}_i\left(\vec{n}\right) = \sigma_{ik} \cdot n_k$.

Šeit σ_{ik} ir spēka uz laukuma vienību i-tā komponente, kas darbojas uz virsmas plakanu elementu, kas ir perpendikulārs virzienam ar indeksu k, šķidruma punktā **r** laika momentā t. Līdz ar to lokāla sprieguma noteikšana šķidrumā tagad ir saistīta ar sprieguma tenzora σ_{ik} komponenšu noteikšanu, kas nav atkarīgs no **n**, nevis ar vektoriālo lielumu σ(**n**).

6.2.4. Sprieguma tenzora izvedums, izmantojot Ostrogradska – Gausa teorēmu

Ķermenī izdala kādu noteiktu tilpuma elementu un apskata uz to darbojošos summāro spēku. No vienas puses to var uzrakstīt tilpuma integrāļa veidā: $\int F dV$, kur F – spēks, kas darbojas uz tilpuma vienību un dV – tilpuma vienība.

Paša apskatāmā tilpuma iekšējās daļas savstarpēji mijiedarbojoties nevar radīt spēkus, kas nekompensētos, tāpēc jāaplūko tikai tie spēki, kas darbojas uz tilpumu no to aptverošās ķermeņa daļas. Šie spēki darbojas caur virsmu, tāpēc rezultējošo spēku var uzrakstīt kā summu no spēkiem, kas darbojas uz katru tilpuma virsmas elementu kāda virsmas integrāļa veidā. Lai šo integrāli no tilpuma integrāļa pārveidotu virsmas integrāļa veidā (Ostrogradska – Gausa teorēma), mums ir jāpanāk, lai integrālis būtu jāņem no kāda lieluma diverģences. Tā kā diverģence no vektora ir skalārs, bet dotajā gadījumā mums ir integrālis nevis no skalāra lieluma, bet no vektora, tāpēc vektoram F_i jābūt diverģencei no kāda otrās kārtas tenzora (diverģējot tenzoru iegūst vektoru, diverģējot vektoru, iegūst skalāru), t.i. $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$. Tad spēks, kas darbojas uz kādu tilpumu, var tikt uzrakstīts kā integrālis pa šo tilpumu aptverošu noslēgtu virsmu šādi: $\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} ds_k$ (*), kur σ_{ik}-sprieguma tenzors, s_k – virsmas elements. Virsmas elementus izvēlas x,y; y,z; x,z plaknēs. Atrod, ka tenzora σ_{ik} komponente ir i-tā komponente spēkam, kas darbojas uz virsmas vienību perpendikulāri asij x_k. Tā uz laukumiņu, kas perpendikulārs x asij, darbojas tam perpendikulārs spēks σ_{xx} un tangenciālie spēki σ_{yx} un σ_{zx}.

Integrālis (*) apzīmē spēku, kas darbojas uz norobežoto tilpumu no apkārtējām daļām. Tāpēc spēks, kas darbojas no iekšējo spriegumu puses uz visu ķermeņa virsmu ir $-\oint \sigma_{ik} ds_k$, kur d**s** ņemts pa ārējo normāli.

6.3. SPRIEGUMA TENZORA ANALĪZE

6.3.1. Sprieguma tenzora komponentes vispārīgā gadījumā

Normālie spriegumi jeb tenzora diagonālās komponentes

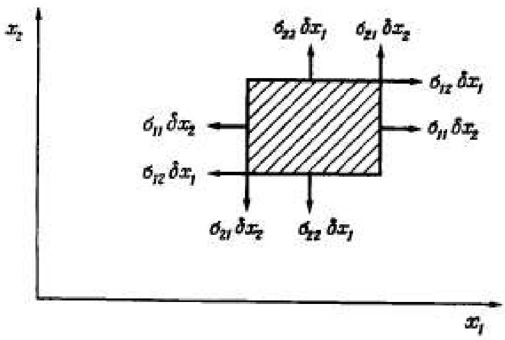
Tenzora σ_{ik} trīs diagonālās komponentes ir normālie spriegumi., t.i. katra no tām dod uz plakana, vienai no koordinātu plaknēm paralēla, virsmas elementa darbojoša virsmas spēka normālo komponenti.

Tenzora nediagonālās komponentes

Seši nediagonālie tenzora σ_{ik} locekļi tiek saukti par tangenciālajiem spriegumiem. Dažreiz tos sauc arī par bīdes spriegumiem, jo kā šķidrumos, tā arī cietos ķermeņos, tie rodas bīdes kustībā vai pārvietojumā, kad vieni paralēli šķidruma slāņi slīd attiecībā pret citiem.

Vispārīgā gadījumā nediagonālie tenzora locekļi ir atšķirīgi no nulles. Tas nozīmē, ka uz katru virsmas elementu ķermenī darbojas ne tikai normālie, bet arī tangenciālie spēki, kas tiecas pārvietot paralēlos virsmas elementus vienu attiecībā pret otru.

Divdimensionāls sprieguma spēku attēlojums [35]



Zīmējumā pirmajā tuvinājumā parādīti dažādi virsmas spēki, kas darbojas plaknē (x_1, x_2) uz mazu taisnstūrveida formas elementu ar malām δx_1 un δx_2, un vienu vienību lielu biezumu x_3 virzienā. Sprieguma tenzoram ir dažādas vērtības taisnstūra pretējās pusēs un, izvedot šķidruma elementa kustības vienādojumu, to ir jāņem vērā.

Galvenie spriegumi [35]

Vienmēr var izvēlēties taisnleņķa koordinātu sistēmas asu vērsumu tā, lai visi otrās kārtas simetriska tenzora nediagonālie elementi būtu vienādi ar nulli. Ja dotajā punktā x spriegumu tenzors ir attiecināts pret šādām galvenajām asīm, tad diagonālie tenzora elementi ir galvenie spriegumi, piemēram, σ'_{11}, σ'_{22}, σ'_{33}; pazīstama otrā ranga tenzoru īpašība ir: izmainoties taisnleņķa koordinātu sistēmas asu virzienam, diagonālo elementu summa nemainās: $\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33} = \sigma_{ii}$. Šajās jaunajās asīs spēka komponentes, kas darbojas uz laukuma vienības elementu ar normāli (n'_1, n'_2, n'_3), ir $\sigma'_{11}n'_1$, $\sigma'_{22}n'_2$, $\sigma'_{33}n'_3$.

Spēks ar komponentēm $(\sigma'_{11}n'_1, 0, 0)$, kas darbojas uz šim elementam perpendikulāru laukuma vienību, ir stiepes spēks (spiedes spēks, ja σ'_{11} ir negatīvs) pirmās jaunās koordinātu ass virzienā. Analoģisks spriedums ir pareizs arī spēkiem ar koordinātēm $(0, \sigma'_{22}n'_2, 0)$, $(0, 0, \sigma'_{33}n'_3)$. Tādā veidā šķidruma vispārīgais stāvoklis kāda dotā punkta tuvumā, var tikt apskatīts kā trīs savstarpēji ortogonālu virzienu stiepes spēku superpozīciju.

Spriegumu tenzors miera stāvoklī esošam šķidrumam jeb statiskais spiediens [35]

Šķidrums ir definēts kā vide, kas nespēj izrādīt pretestību jebkurai pielikto spēku deformējošai iedarbībai, ja netiek izmainīts tilpums. Apskatīsim virsmas spēkus, kas pielikti šķidrumam sfēras iekšpusē, no to aptverošā šķidruma puses. Pie tam sfēras rādiuss tiek uzskatīts par tik mazu, ka σ_{ij} ir gandrīz nemainīgs uz tās virsmas. Izvēlēsimies tādas koordinātu asis, kas lokāli sakrīt ar tenzora σ_{ij} galvenajām asīm un uzrakstīsim spriegumu tenzoru, kuram nediagonālie elementi ir vienādi ar nulli, kā divu tenzoru summu:

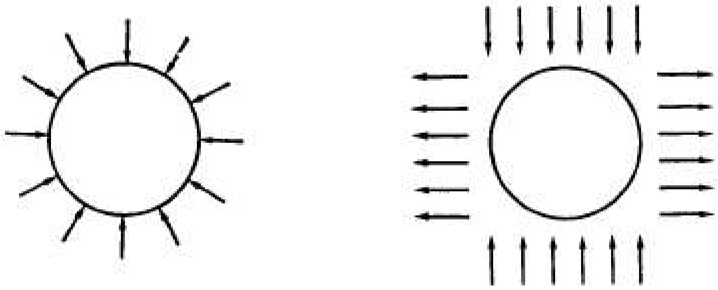
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{pmatrix}$$

Vienmērīga sfēras saspiešana

Pirmais no šiem tenzoriem ir sfēriski simetrisks jeb izotrops un atbilstošais spēka pieaugums uz sfēras virsmas vienību punktā ar normāli **n** ir $\frac{1}{3}\sigma_{ii}\vec{n}$. Šī vienmērīgā šķidruma saspiešana sfērā (jo $\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ zīme parasti ir negatīva) tiecas izmainīt tās tilpumu un tam, protams, šķidrums sfērā spēj turēties pretī, kaut arī tas atrodas miera stāvoklī.

Sfēras novirzes no izotropās formas

Otrais no tenzoriem nosaka sprieguma tenzora novirzes no izotropās formas. Diagonālo elementu summa šajā tenzorā ir nulle, tādēļ tie ir normālie spriegumi, no kuriem vismaz viens ir stiepes, bet otrs – spiedes. Atbilstošajai spēka daļai, kas darbojas uz sfēras virsmas vienību punktā ar normāli (n'_1, n'_2, n'_3), ir šādas koordinātes jaunajā koordinātu sistēmā: $\left(\sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_1$; $\left(\sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_2$; $\left(\sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_3$. Citiem vārdiem, sfēra ir iegremdēta šķidrumā, kurš atrodas vienmērīgas stiepes stāvoklī vienas ass virzienā un vienlaicīgi vienmērīgas spiedes stāvoklī otras (ortogonālas) ass virzienā un vienmērīgas stiepes vai spiedes stāvoklī trešajā ortogonālajā virzienā (šo stiepju un spiežu algebriskā summa ir vienāda ar nulli), kā tas parādīts zīmējumā.



Šeit attēloti divi spriegumu veidi uz sfērisku šķidruma elementu: a) viendabīgs vispusējs spiediens, b) viendabīga stiepe tenzora galvenās ass virzienā vienlaikus ar vienmērīgu spiedi citas galvenās ass virzienā.

Tātad, šī otrā daļa tiecas ar deformācijas palīdzību pārvērst sfērisko šķidruma elementu elipsoīdā bez jebkādas tilpuma izmaiņas; šo deformējošo virsmas spēku nav iespējams līdzsvarot ne ar kādu tilpuma spēku, jo tilpuma spēks ir citas kārtas mazs lielums mazā sfēriskā elementa tilpumā. Šķidruma sfēriskais elements nevar parādīt pretestību šādai deformācijai pielikto spēku iedarbībā (t.i. tādu spēku, ko attiecībā pret elementu rada ārēji spēki), tātad miera stāvoklis ir nesavienojams ar spēka

$$\left(\sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_1;\ \left(\sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_2;\ \left(\sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma_{ii}\right)n'_3$$

komponenšu nenulles vērtību eksistenci.

Sprieguma tenzora nekustīgā šķidrumā izotropiskums [35]

Tātad šķidrumā miera stāvoklī visi galvenie spriegumi σ'_{11}, σ'_{22}, σ'_{33} ir vieni un tie paši un ir vienādi ar $\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ visos šķidruma punktos, t.i spriegumu tenzors nekustīgā šķidrumā viscaur ir izotropisks, jebkuras ortogonālas asis ir spriegumu tenzora galvenās asis un šķidrumā darbojas tikai normālie spriegumi.

6.3.2. Spiediens šķidrumos [35]

Normāl jeb hidrostatiskais jeb statiskais spiediens

Nekustīgi šķidrumi parasti atrodas spiedes stāvoklī, arī ideālā šķidrumā nedarbojas viskozitātes spēki, nav iekšējās berzes, tāpēc ideālā šķidrumā spēki darbojas tikai pa normāli un nav tangenciālie (viskozie) spēki. Līdz ar to ideāla šķidruma spriegums uz patvaļīgu virsmas elementu var tikt izteikts kā $\vec{\sigma}=-p\vec{n}$ Sprieguma komponentes uz patvaļīgu virsmas elementu var izteikt ar sprieguma tenzoru: $\sigma_{ik}=\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix}\Rightarrow\ \sigma_{ik}=-p\delta_{ik}$, kur $p=-\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ var nosaukt par statisko spiedienu šķidrumā un tas vispārīgā gadījumā ir atkarīgs no **r**. Redzams, ka spiediens ir skalārs lielums.

Ideāla šķidruma modelī sprieguma tenzors tātad ir diagonāls, tāpēc $\sigma_i=p\delta_{ik}n_k$.

Nosaukuma “hidrostatiskais spiediens” atbilstība jēdzienam

Šim lielumam bieži lieto nosaukumu hidrostatiskais spiediens, lai arī tā iedomājamā saistība ar ūdeni ir tikai ar vēsturisku attaisnojumu un var novest līdz pārpratumiem. Analoģiski jēdziens “hidrodinamika” un aerodinamika” ir lieki ierobežoti un tos arvien biežāk aizstāj ar jēdzienu “šķidrumu dinamika”.

spiediena spēks

Tad uz katru ķermeņa virsmas vienību darbojas pēc lieluma vienādi spiediena spēki - p·**n**, kas vērsti perpendikulāri virsmai uz ķermeņa centru, un tas ir viena un tā paša lieluma normāls spēks pie jebkura virsmas normāles **n** vērsuma dotajā punktā. Ja šo spiedienu apzīmē ar **p**, tad uz virsmas elementu ds_i no apkārtējā šķidruma darbojas spēks – **p**ds_i, vai izsakot ar tenzoru –

$p\delta_{ik}ds_k$. "-" zīme jāraksta tādēļ, ka spriegums pēc definīcijas ir stiepes spēks, bet spiediens apzīmē spiedes spēku.

Spiediena īpašība darboties visos virzienos vienādi

Šī pazīstamā statiskā spiediena īpašība šķidrumā "darboties vienādi visos virzienos" bieži tiek izvesta kā pieņēmuma, ka nekustīgā šķidrumā tangenciālie spriegumi ir vienādi ar nulli, sekas; izvedums sastāv no spēku, kas darbojas uz vienkāršas ģeometriskas formas šķidruma elementu (piemēram, tetraedru ar trim ortogonālām šķautnēm vai cilindra daļu ar vienu plakanu griezumu, kas normāls pret tā veidulēm un otru, kas ir lenķī pret veidulēm), līdzsvara nosacījumu apskatīšanas. Pieņēmums par to, ka tangenciālie spriegumi ir vienādi ar nulli nekustīgā šķidrumā, ir saprātīgs, jo tad, kad nav nekādas kustības tilpuma iekšienē ir maziespējami, ka nejauša molekulu konfigurācija un to haotiska kustība varētu radīt kādu ievērojamu no statiska skatu punkta viedokļa virzītu kustību, kurā darbības rezultāts, ko izsauc molekulārie spēki un kustības daudzuma plūsma caur virsmas elementu, būtu vērsts ne normāles virzienā. Tomēr acīmredzot šo sprieguma tenzora īpašību nekustīgam šķidrumam labāk izvest izejot no vienkāršaka pieņēmuma, ka šķidrumi nevar pretoties jebkādam mēģinājumam izmainīt to formu.

6.4. SPRIEGUMA TENZORS DAŽĀDĀS KOORDINĀTU SISTĒMĀS

6.4.1. Sprieguma tenzors vektoriāli

7.1.2. Nepārtrauktas vides kustības vienādojums ar sprieguma tenzoru

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}}_{(I)} \vec{\sigma}_k, \text{ kur } \vec{\sigma}_k = \underbrace{e_i}_{(II)} \sigma_{ik}.$$

(I) Jāatrod no katras sprieguma tenzora σ_k komponentes diverģence. Šī diverģence jāpārveido līklīniju koordinātēs.

(II) Sprieguma tenzors jāpārraksta ar līklīniju koordinātu sistēmas ortiem. e_i – līklīniju sistēmas orti.

7. KUSTĪBAS VIENĀDOJUMS NEPĀRTRAUKTAI VIDEI

7.1. KUSTĪBAS VIENĀDOJUMA IZVEDUMS

7.1.1. II Ņūtona likums materiālam elementam

Uzraksta II Ņūtona likumu materiālam elementam ar masu Δm: $d(\Delta m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}$.

Spēka izteiksme

Summāro spēku aprēķina, summējot uz materiālā elementa virsmu darbojošos spriegumus.

$$F_i = \oint \sigma_{ik} n_k \vec{e}_i \cdot dS$$

Orti e_i ir konstanti, tos var nest ārā no integrāļa zīmes. Šo izteiksmi var pārveidot pēc Gausa – Ostrogradska teorēmas: $F_i = \vec{e}_i \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \vec{e}_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \Delta V$

Pārveido izteiksmes kreiso pusi

Tā kā $\Delta m=\rho\Delta V$, tad $d(\rho\Delta V\mathbf{v})/dt = \rho\Delta V\frac{d\vec{v}}{dt}$. Tā kā materiālā elementa tilpums ir laikā nemainīgs, tad var rakstīt $\Delta V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} = \frac{\partial \vec{\sigma}_k}{\partial x_k}\Delta V$

7.1.2. Nepārtrauktas vides kustības vienādojums ar sprieguma tenzoru

Vienādojums $\Delta V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} = \frac{\partial \vec{\sigma}_k}{\partial x_k}\Delta V$ spēkā jebkuram tilpumam, tāpēc izdalot ar ΔV un uzrakstot vienādojumu komponentēs, iegūst: $\frac{d(\rho v_i)}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$. Pie tam σ_{ik} jāatvasina ir tieši pēc x_k, jo nav pierādīts, ka sprieguma tenzors ir simetrisks (sk. 9.1. nodaļu).

Kustības vienādojums nesaspiežamam šķidrumam

Nesaspiežamam šķidrumam blīvums ir laikā nemainīgs, tāpēc: $\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$.

Kustības vienādojums dažādās koordinātu sistēmās

Lai prastu atrisināt kustības vienādojumu dažādās situācijās (t.i. gadījumos, kad netiek izmantota Dekarta ortogonālā koordinātu sistēma), ir nepieciešams mācēt atrast ātrumu, paātrinājuma, diverģences un sprieguma tenzora izteiksmes līklīniju koordinātu sistēmā.
Sk. 13. Koordinātu sistēmas, koordinātu sistēmu maiņa

7.1.3. Jautājums, vai vienādojumu sistēma ir noslēgta?

Tātad šobrīd ir iegūti divi vienādojumi – nepārtrauktības vienādojums (vienādojums blīvumam, sk. 5. nodaļu) un nepārtrauktas vides kustības vienādojums, kas dod 3 vienādojumus ātruma komponentēm. Šajos vienādojumos ir 4 nezināmi lielumi (ρ, v_i) un tie, tātad, saistīti 4 vienādojumos. Lai vienādojumi būtu atrisināmi, nepieciešams noteikt sprieguma tenzora σ_{ik} komponenšu vērtības – tās ir fenomenoloģiski koeficienti, kuru vērtības var noteikt eksperimentāli. Sk. 6.3. Sprieguma tenzora analīze un 9.5. Sprieguma tenzora pilnā izteiksme.

7.2. KUSTĪBAS VIENĀDOJUMS DAŽĀDĀS SITUĀCIJĀS

7.2.1. Kustības vienādojums, ja darbojas arī tilpuma spēki

Smaguma spēks kustības vienādojumā

Smaguma spēks ir tilpuma spēks. Ja šķidrums atrodas smaguma spēka laukā, tad uz katru tā tilpuma elementu darbojas arī smaguma spēks $\rho\mathbf{g}$, kur **g** – brīvās krišanas paātrinājums. Šo spēku jāpievieno kustības vienādojuma labajā pusē: $\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k}+\rho\vec{g}$.

7.2.2. Eilera vienādojums jeb kustības vienādojums ideālā šķidrumā

Raksta nepārtrauktas vides kustības vienādojumu ideālam šķidrumam (sk. 1.2.1. Ideāls šķidrums), ievietojot atrasto sprieguma tenzoru $\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}$ (sk. 6.3.2. Spiediens šķidrumos):

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial(-p\delta_{ik})}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\mathrm{grad}\,p$$

(Šeit indekss pie x mainījies tādēļ, ka $-p\delta_{ik}$ nebūs nulle tikai gadījumā, kad i=k (diagonāls sprieguma tenzors).

Iegūto vienādojumu pārrakstot vektoriālā formā ar izvērstu konvektīvo ātrumu (sk. 2.3. Konvektīvais atvasinājums.) iegūst: $\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p$

Vai, ievedot kustības vienādojumu ideālam šķidrumam, sistēma ir noslēgta?

Līdz ar Eilera vienādojuma izvešanu ideālam šķidrumam, ir iegūti 3 vienādojumi ātrumam, iepriekš tika iegūts nepārtrauktības vienādojums (sk. 5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums), tātad kopā ir četri vienādojumi. Tomēr sistēma nav noslēgta, jo ir pavisam 5 nezināmi lielumi – trīs ātruma komponentes, spiediens un blīvums. Vēl jāatrod vienādojums spiedienam (sk. 8.nodaļu)

8. VIENĀDOJUMS SPIEDIENAM

8.1. STĀVOKĻA VIENĀDOJUMS

8.1.1. Lokālā termodinamiskā līdzsvara hipotēze

Aprakstot šķidrumus parasti izmanto lokālā termodinamiskā līdzsvara hipotēzi. Tiek uzskatīts, ka visi šķidruma materiālie elementi dotajos apstākļos atrodas lokālā termodinamiskā līdzsvarā. Šādu hipotēzi rada apsvērums, ka ikkatrs materiālais elements nonāk termodinamiskajā līdzsvarā daudz ātrāk, nekā vide kopumā. Ja vide atrodas termodinamiskā līdzsvarā, tad lokāli var izmantot termodinamiskās sakarības un tas ļauj apgalvot, ka visi iekšējie parametri ir ārējo parametru funkcijas.

8.1.2. Stāvoļa vienādojums

Spiedienu kā iekšēju parametru var izteikt kā $p=p(\rho, T)$. Šo sakarību var noteikt pēc Mendeļejeva – Klapeirona vienādojuma $pV=RT$. Problēma tāda, ka temperatūra T nav zināma. Tātad vēl nepieciešams atrast vienādojums temperatūrai.

Vienādojums temperatūrai

Temperatūra ir saistīta ar vielas iekšējo enerģiju. Tātad jāmāk uzrakstīt vienādojums iekšējai enerģijai (sk. 8.1.3.).

8.1.3. Vienādojums iekšējās enerģijas izmaiņai

Vienādojumu iekšējai enerģijai var atrast, uzrakstot vienādojumu nepārtrauktas vides pilnajai enerģijai un kinētiskai enerģijai, attiecīgi pēc tam varēs izteikt arī iekšējo enerģiju.

Kinētiskās enerģijas teorēma šķidrumu mehānikā

Tilpuma vienības kinētiskās enerģijas izmaiņas ātrums

Kustības vienādojumu $\frac{d(\rho v_i)}{dt}=\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ pareizina ar v_i un summē pēc "i". v_i ienes zem diferenciālzīmes:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}_{(*)}=\underbrace{\frac{\partial(v_i\sigma_{ik})}{\partial x_k}}_{(**)}-\underbrace{\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(***)}$$

(*) Jautājums, vai kinētiskajai enerģijai izpildās lokālais saglabāšanās likums. Lai tas izpildītos, nepieciešams, lai $\frac{d}{dt}\frac{\rho \vec{v}^2}{2}$ varētu izteikt kā diverģenci no kaut kādas plūsmas.

(**) šis loceklis raksturo, enerģijas plūsmu (diverģences formula)

(***) šis loceklis raksturo, kā kinētiskā enerģija rodas vai pazūd, t.i. apraksta, kā berzes dēļ kinētiskā enerģija transformējas iekšējā enerģijā.

Kinētiskās enerģijas izmaiņa integrālā veidā

Uzraksta kinētiskās enerģijas izmaiņas vienādojumu integrālā formā. Tamdēļ vienādojums jānointegrē pa visu materiālā elementa tilpumu.

$$\frac{d}{dt}\int\frac{\rho\vec{v}^2}{2}dV=\int\frac{\partial(v_i\sigma_{ik})}{\partial x_k}dV-\int\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV=\underbrace{\oint v_i\underbrace{\sigma_{ik}n_k}_{(I)}dS}_{(II)}-\underbrace{\int\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV}_{(III)}$$

(I) – Spēks uz laukuma vienību

(II) – Jauda, šī kinētiskā enerģija tiek patērēta darba veikšanai

(III) – Ja šī daļa nav vienāda ar nulli, tad var secināt, ka ne visa kinētiskā enerģija aiziet darba veikšanai, daļa transformējas siltumā, iekšējā enerģijā, t.i. kinētiskā enerģija lokāli nesaglabājas.

______Lokālais saglabāšanās likums pilnai nepārtrauktas vides enerģijai uz masas vienību

Tātad, vienādojumu temperatūrai var iegūt, ja postulē pilnās enerģijas lokālās saglabāšanās likumu.

______Pilnā enerģija

Iepriekš secinājām, ka kinētiskajai enerģijai lokālais saglabāšanās likums neizpildās un bez kinētiskās enerģijas materiālajam elementam piemīt arī iekšējā enerģija, tāpēc pilno enerģiju uz tilpuma vienību var pierakstīt šādi: $\rho\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\tilde{e}\right)\Delta V$, kur $\tilde{e}$ - iekšējā enerģija uz vienu masas vienību.

________Pilnās enerģijas izmaiņas iemesli

Materiālā elementa pilnā enerģija mainās divu iemeslu dēļ:

- uz materiālo elementu darbojas spēki, kas veic darbu
- notiek siltumapmaiņas procesi

-------------- Postulāts

- Pilnā enerģija uz tilpuma vienību mainās tādēļ, ka ārēji pret attiecīgo materiālo elementu spēki – spriegumi, kuri darbojas caur attiecīgā materiālā elementa virsmu, dara darbu, ko aprēķina: $\int v_i\sigma_{ik}n_k dS$, kā arī notiek siltumapmaiņa avotu dēļ (siltumplūsma), ko raksturo ar siltumapmaiņas vektoru $\vec{q}$: $-\int \vec{q}\vec{n}dS$

-------------- siltumapmaiņas vektors

siltumapmaiņas vektors $\vec{q}$ ir caur vienu laukuma vienību laika vienībā izejošā siltuma daudzums.

________pilnās enerģijas izmaiņas vienādojums nepārtrauktai videi

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\tilde{e}\right)\Delta V\right)=\int v_i\sigma_{ik}n_k dS-\int \vec{q}\vec{n}dS$$

Ja vide būtu magnētiskajā laukā, tad klāt nāktu Pointinga vektors (sk. Sedola "Dinamika splošnih sred")

Masa ir nemainīga, tādēļ $\rho\Delta V$ iznes pirms diferenciālzīmes. Virsmas integrāļus pārveido pēc Gausa –Ostrogradska teorēmas: $\frac{d}{dt}\left(\rho\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\tilde{e}\right)\Delta V\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma_{ik})\Delta V-\operatorname{div}\vec{q}\Delta V$,

vienādojums spēkā jebkuram tilpumam, tātad: $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\tilde{e}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma_{ik})-\operatorname{div}\vec{q}$

-------------- Komentāri

Ar šo vienādojumu ir noteikts, kā materiālais elements apmainās ar enerģiju, t.i. ir izslēgtas jau noteiktas vides, piemēram, tādas, kur darbojas momentspriegumi (šķidrie kristāli), arī elektromagnētiskie lauki – šajos gadījumos parādītos plūsmas, kas saistītas ar elektromagnētisko lauku enerģijas pārnesi, to pieraksta ar Pointinga vektoru. Te nav ņemts vērā arī tas, ka materiālais elements var mijiedarboties ar gravitācijas lauku. Šādā gadījumā kreisajā pusē būtu jāpieskaita potenciālā enerģija, bet labajā – materiālā elementa darbs gravitācijas laukā.

No šī vienādojuma jāiegūst vienādojums iekšējai enerģijai. To, savukārt, izmantos temteratūras noteikšanai un tad varēs turpināt darboties lokālā līdzsvara tuvinājumā.

______Iekšējās enerģijas izmaiņas vienādojums.

Iegūst no pilnās enerģijas atņemot kinētisko enerģiju:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\tilde{e}\right)-\frac{d}{dt}\frac{\rho\vec{v}^2}{2}=\frac{\partial(v_i\sigma_{ik})}{\partial x_k}-\frac{\partial(v_i\sigma_{ik})}{\partial x_k}-\operatorname{div}\vec{q}+\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$$\rho\frac{d\tilde{e}}{dt}=\underbrace{-\operatorname{div}\vec{q}}_{(*)}+\underbrace{\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(**)}$$

(*) Šis loceklis raksturo siltuma plūsmu, kas iziet caur materiālā elementa virsmu
(**) Šis loceklis raksturo to siltumu, kas pāriet iekšējā enerģijā no kinētiskās enerģijas
Šajā vienādojumā atkal ir jauni nezināmi lielumi, kuriem nepieciešami postulāti. Tie ir iekšējā enerģija $\tilde{e}$ un siltumapmaiņas vektors $\vec{q}$. Iekšējo enerģiju un siltumapmaiņas vektoru var izteikt ar entropijas palīdzību.

8.1.4. Vienādojums entropijai

Vienādojums entropijas izmaiņai

Balstoties uz lokālā termodinamiskā līdzsvara hipotēzi, lokāli var izmantot termodinamiskās sakarības.

Termodinamikas pamatvienādojums

Iekšējās enerģijas izmaiņa ir vienāda ar pievadītā siltuma daudzuma un padarītā darba starpību: $\Delta E = \Delta Q - p\Delta V$.

TD pamatvienādojums vienai masas vienībai

Termodinamikas pamatvienādojumu pārraksta vienai masas vienībai, ņemot vērā, ka kvazistatiskam procesam siltuma daudzuma izmaiņa ir vienāda ar temperatūras un entropijas izmaiņas reizinājumu: ΔQ=TdS*: $d\tilde{e}=Td\tilde{s}-pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Šo izteiksmi pareizina ar $\frac{\rho}{dt}$ ($\frac{1}{\rho}$ diferencē pēc t kā saliktu funkciju $-\frac{p\rho}{dt}d\left(\frac{1}{\rho}\right)=-p\rho\cdot-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{dt}$):

$$\rho\frac{d\tilde{e}}{dt}=\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt}+\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$\frac{d\rho}{dt}$ izsaka no nepārtrauktības vienādojuma: $\frac{d\rho}{dt}=-\operatorname{div}(\rho\vec{v})=-\underbrace{\vec{v}\operatorname{grad}\rho}_{=0}-\rho\operatorname{div}\vec{v}=0$, iegūst:

$$\rho\frac{d\tilde{e}}{dt}=\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt}-p\operatorname{div}\vec{v}$$

Ievieto iekšējās enerģijas izmaiņas vienādojumu:

$$-\operatorname{div}\vec{q}+\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt}-p\operatorname{div}\vec{v}$$

Izsaka entropijas izmaiņu, ņemot vērā, ka $\operatorname{div}\vec{v}=\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$:

$$\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt}=p\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\underbrace{\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(***)}-\operatorname{div}\vec{q}$$

Ievieto sprieguma izteiksmi

(***) loceklī, kurš raksturo iekšējās enerģijas izmaiņu uz kinētiskās enerģijas izmaiņu rēķina, ievieto sprieguma izteiksmi $\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+t_{ik}$ (sk. 9.2. nodaļa):

$$\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt} = p\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \underbrace{p\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(I)} - \operatorname{div}\vec{q} + \underbrace{\tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(II)}$$

Tātad kinētiskā enerģija pāriet iekšējā var divos veidos, kā to apliecina arī iegūtā izvērstā locekļa (***) izteiksme:

(I) – saspiežoties šķidrumam,

(II) – enerģijas disipācijas dēļ.

Entropijas izmaiņas vienādojums:

Saīsinot vienādos locekļus, iegūst: $\rho T\frac{d\tilde{s}}{dt} = \tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}\vec{q}$.

Entropijas lokālās saglabāšanās likums

Jāpārliecinās, vai entropijai izpildās lokālās saglabāšanās likums, t.i. vai entropijas izmaiņas vienādojumu var uzrakstīt lokālās saglabāšanās formā $\frac{d\tilde{s}}{dt} + \operatorname{div}\tilde{s}\vec{j} = 0$.

Izdala vienādojumu ar T un ienes T zem diverģences zīmes, ņemot vērā, ka:

$-\frac{1}{T}\operatorname{div}\vec{q} = -\operatorname{div}\frac{\vec{q}}{T} + \vec{q}\operatorname{grad}\frac{1}{T}$ un $\tilde{s}\vec{j} = \frac{\vec{q}}{T}$ (Klauziusa vienādība) , iegūst:

$$\rho\frac{d\tilde{s}}{dt} = -\operatorname{div}\tilde{s} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{T}\tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(*)} + \underbrace{\vec{q}\operatorname{grad}\frac{1}{T}}_{(**)}}_{(I)}$$

Redzams, ka entropijas vienādojumu lokālā saglabāšanās likuma formā uzrakstīt nevar.

(I) daļa raksturo entropijas pieaugumu neatgriezenisku procesu rezultātā uz vienu tilpuma vienību – entropijas produkcija. Šī daļa vienādojumā var būt tikai pozitīva vai vienāda ar nulli. Ar nulli tā būs vienāda tad, ja nebūs siltumkustības no aukstāka ķermeņa uz siltāku (**) un ja šķidrums nebūs viskozs (*).

8.1.5. Vienādojums temperatūrai

Zināms, ka entropija ir funkcija no temperatūras un ārējiem sistēmas parametriem (ρ): $\tilde{s} = \tilde{s}(T,\rho)$. Tā kā spiediens arī izsakās kā p=p(ρ, T), tad entropiju var uzrakstīt kā funkciju no temperatūras un spiediena: $\tilde{s} = \tilde{s}(T,p) \Rightarrow \frac{d\tilde{s}}{dt} = \left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dt}$

Šo izteiksmi ievieto entropijas izmaiņas vienādojumā:

$$\rho T\left(\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dt}\right) = \tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}\vec{q}$$

Termodinamikā zināms, ka īpatnējā siltumietilpība pie konstanta spiediena $\tilde{C}_p = T\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial T}\right)_p$, izotropām vielām izplešanās koeficients ir uz tilpuma vienību tas ir $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_p$. Ar Gibsa potenciāla palīdzību var pierādīt, ka $\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{\rho}\beta$.

Procesus nepārtrauktā vidē var aprakstīt lineārā tuvinājumā. Izvirza hipotēzi par neatgriezenisko spēku linearitāti $\vec{q} = -\lambda\Delta T$ (Furjē likums), kur λ - siltumvadīšanas koeficients.

$\mathrm{div}\vec{q} = -\lambda \mathrm{gra}\partial T$

Termodinamiskais potenciāls $d\tilde{\phi} = d\tilde{e} - dT\tilde{s} + d\left(p\frac{1}{\rho}\right)$. Ievieto TD pamatvienādojumu $d\tilde{e} = Td\tilde{s} - pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$, iegūst: $d\tilde{\phi} = Td\tilde{s} - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + d\left(p\frac{1}{\rho}\right) - \tilde{s}dT$

Gibsa potenciāls (stāvokļa funkcija) ir pilnais diferenciālis: $d\mu = -Td\tilde{s} + \frac{1}{\rho}dp$

Siltumvadīšanas vienādojums

Tad iegūst pilno siltumvadīšanas vienādojumu: $\underbrace{\rho\tilde{C}_p\frac{dT}{dt}}_{(I)} = \underbrace{T\beta\frac{dp}{dt}}_{(II)} + \underbrace{t_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{(III)} \underbrace{- \mathrm{div}\vec{q}}_{(IV)}$

(I) Konvektīvais temperatūras atvasinājums, konvektīvā siltumpārnese. Ja siltumpārneses ātrums jāņem vērā, tad iegūst konvektīvo siltumpārneses vienādojumu.
(II) β parasti ir lielāks par nulli. Apraksta adiabātisko saspiežamības efektu. Ar šo saistīta, piemēram, skaņas izplatīšanās.
(III) Raksturo, kā pieaug temperatūra viskozās berzes dēļ. Parasti šo lielumu neņem vērā.
(IV) Difūzijas loceklis, kas apraksta temperatūras difūziju telpā.
Tikai (I)=(II) būs adiabātiskas saspiešanas gadījumā.

9. SPRIEGUMI VISKOZĀ (REĀLĀ) ŠĶIDRUMĀ

9.1. JAUTĀJUMS PAR SPRIEGUMA TENZORA SIMETRISKUMU

9.1.1. Kad sprieguma tenzors ir un kad nav simetrisks

Nepārtrauktas vides mehānikā sprieguma tenzors parasti ir simetrisks. Tas nav simetrisks, piem. šķidrumos ar spinu. t.i. šķidrumos, kuros ir rotējoši elementi. Tas, ka sprieguma tenzors ir simetrisks, ļauj būtiski samazināt viskozo sprieguma tenzora nezināmo koeficientu skaitu.
Spriegumu tenzora simetriskuma pierādījums šķidrumos bez spina, izriet no šķidruma kustības daudzuma lokālā saglabāšanās likuma (sk. 9.1.3. nodaļu).

9.1.2. Sakarība lielumiem, kas raksturo kādas kvantitātes daudzumu uz masas vienību.

Teorēma

Ja ir kāds lielums $\tilde{a}$, kas raksturo kādas kvantitātes daudzumu uz 1 masas vienību (piemēram, ātrums raksturo kustības daudzumu uz vienu masas vienību, īpatnējais blīvums raksturo blīvumu uz vienu masas vienību (ρ/m); šāds lielums var būt gan vektoriāls, gan skalārs), tad šādam lielumam spēkā: $\rho\frac{d\tilde{a}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{a})+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{a}v_i)$. Šeit "i" ir noklusētais indekss, pēc kura notiek reizināšana.

Pierādījums

Nepieciešams pierādīt, ka šāda vienādība ir spēkā. Pierādāmo izteiksmi uzrakstot izvērsti (diferencējot labās puses locekļus) iegūst: $\rho\frac{d\tilde{a}}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}\tilde{a}+\rho\frac{\partial\tilde{a}}{\partial t}+\tilde{a}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)+\rho v_i\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x_i}$.

Iegūtās izteiksmes kreisās puses locekli uzraksta izvērsti (sk. 2.3. Konvektīvais atvasinājums.) un pārgrupē labās puses locekļus:
$\rho\frac{\partial\tilde{a}}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x_i}=\rho\frac{\partial\tilde{a}}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x_i}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\tilde{a}+\tilde{a}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)$. Redzams, ka izteiksmes kreisajā pusē esoši locekļi ir arī izteiksmes labajā pusē, tos var saīsināt, tādēļ jāpierāda, ka: $\frac{\partial\rho}{\partial t}\tilde{a}+\tilde{a}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)=0$. Šo izteiksmi var pārrakstīt: $\tilde{a}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\right)=0$. Redzams, ka izteiksme iekavās ir vienāda ar nulli jebkurā gadījumā (sk. 5.2. Nepārtrauktības vienādojums) un līdz ar to vajadzīgais pierādīts.

9.1.3. Kustības daudzuma lokālais saglabāšanās likums

Kustības vienādojuma uzrakstīšana jaunā veidā

Nepārtrauktas vides kustības vienādojumu (sk. 7.1.2.) $\rho\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$ pēc iepriekš pierādītās sakarības (sk. 9.1.2.) pārraksta kā: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k)=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$.

Kustības daudzuma plūsmas tenzors

Redzams, ka vienas tilpuma vienības lokālā kustības daudzuma ρv_i izmaiņa laikā, var tikt izteikta kā diverģence no kaut kāda tenzora: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)=\frac{\partial}{\partial x_k}j_{ik}$, kur j_{ik} ir tenzors, kas raksturo kustības daudzuma plūsmu caur materiālo elementu aptverošo virsmu.

Sakarība tilpuma elementam

Lai iegūtu sakarību apskatāmajam tilpumam, tā jāintegrē pa tilpumu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_k} j_{ik} dV .$$

Ostrogradska – Gausa teorēmas pielietojums

Integrāli pēc Gausa – Ostrogradska teorēmas pārveido un iegūst:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_k} j_{ik} dV = \oint j_{ik} n_k dS .$$

Secinājumi

Redzams, ka kustības daudzuma izmaiņa laikā fiksētā tilpumā ir vienāda ar spriegumu summu, kas darbojas uz tilpumu aptverošo virsmu.

Šādu izteiksmi var uzrakstīt arī blakusesošiem tilpuma elementiem. Attiecīgi virsmai, kas abiem ir kopīga, abos integrāļos vektora **n** virziens būs pretējs. Tātad to kustības daudzumu, kurš būs izplūdis no pirmā tilpuma elementa, kompensēs tas kustības daudzums, par kuru būs pieaudzis kustības daudzums otrā tilpuma elementā, t.i kāda noteikta materiālā elementa kustības daudzuma samazināšanās ir vienāda ar visu blakus esošo materiālo elementu kustības daudzuma palielināšanos.

9.1.4. Kustības daudzuma momenta plūsmas blīvuma vienādojums

Atradīsim, kādam jābūt sprieguma tenzoram, lai izpildītos arī lokālais kustības daudzuma momenta saglabāšanās likums. To var secināt, aplūkojot vienādojumu kustības daudzuma momenta plūsmas blīvumam.

Kā iegūt vienādojumu kustības daudzuma momenta plūsmas blīvumam

Lai iegūtu vienādojumu kustības daudzuma momenta plūsmas blīvumam, nepārtrauktas vides kustības vienādojuma (sk. 7.1.2.) $\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ abas puses no kreisās puses pareizina ar lielumu $e_{ikl}x_k$ (šeit summē pēc "k", pareizinot notiks summēšana arī pēc "l"). Sk. 12.1. Pilnīgi antisimetrisks trešā ranga tenzors - eikl.

Kustības vienādojums pēc reizinājuma ar pilnīgi antisimetrisku 3 ranga tenzoru

$$e_{ikl}x_k\rho\frac{dv_l}{dt} = e_{ikl}x_k\frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}$$

Apskata vienādojuma kreiso pusi

Lai varētu ienest x_k zem diferenciāļa zīmes, atrod x_k konvektīvo atvasinājumu: $\frac{dx_k}{dt} = \underset{(I)}{\frac{\partial x_k}{\partial t}} + \underset{(II)}{v_i\frac{\partial x_k}{\partial x_i}}$. Izteiksmes loceklis (I) ir vienāds ar 0, jo x_k laikā nemainās, savukārt locekļa (II) vērtība no 0 būs atšķirīga tikai tad, kad k=i, t.i. iegūstam: $\frac{dx_k}{dt} = v_k$. Līdz ar to var rakstīt, ka $\frac{d(x_k v_l)}{dt} = x_k\frac{dv_l}{dt} - \underset{(III)}{v_k v_l}$. Ja iegūtās izteiksmes locekli (III) reizina ar e_{ikl}, tad iegūst divu tenzoru konjugāciju – simetriskā un antisimetriskā. Tā kā šāda konjugācija vienāda ar nulli (sk. 12.2.). Tātad $e_{ikl}v_kv_l=0$, līdz ar to $e_{ikl}x_k$ drīkst ienest zem diferenciāļa zīmes un rezultāts no tā nemainīsies.

Apskata vienādojuma labo pusi

$e_{ikl}x_k\frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}$. Noskaidro, kas rodas, ja $e_{ikl}x_k$ ienes zem diferenciāļa zīmes.

$e_{ikl}\dfrac{\partial(x_k\sigma_{lm})}{\partial x_m} = e_{ikl}\underset{(I)}{\dfrac{\partial x_k}{\partial x_m}\sigma_{lm}} + e_{ikl}x_k\dfrac{\partial\sigma_{lm}}{\partial x_m}$. Izteiksmes loceklis (1) var tikt pierakstīts kā

$e_{ikl}\delta_{km}\sigma_{lm} \underset{1}{=} e_{ikl}\sigma_{lk} \underset{2}{=} -e_{ilk}\sigma_{lk} \underset{3}{=} -e_{ikl}\sigma_{kl}$ (1 – Kronekera simbols nav 0 tad, kad k=m, to ievieto; 2 – tenzoram e_{ikl} veic pāra skaita permutācijas – mainās zīme; 3 – brīvos indeksus pārapzīmē – k par l un l par k.).

Impulsa momenta plūsmas blīvuma vienādojums

Ievietojot iepriekš iegūto kustības vienādojumā, kas pareizināts ar pilnīgi antisimetrisko trešā ranga tenzoru, iegūst: $\rho\cdot\dfrac{d}{dt}\underset{***}{(e_{ikl}x_k v_l)} = \dfrac{\partial}{\partial x_m}(e_{ikl}x_k\sigma_{lm}) + e_{ikl}\sigma_{kl}$

Redzams (atceroties pilnīgi antisimetriskā tenzora izmantojumu vektoriālā reizinājuma pierakstā, sk. 12.1.2.), ka iekavās (***) ir pierakstīta kustības daudzuma momenta uz vienu masas vienību i-tā komponente: $[\vec r\times\vec v]_i$.

To apzīmē kā $[\vec r\times\vec v]_i = \tilde\ell_i$: $\rho\dfrac{d\tilde\ell_i}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial x_m}(e_{ikl}x_k\sigma_{lm}) + e_{ikl}\sigma_{kl}$

Impulsa momenta plūsmas blīvuma vienādojums ar izvērstu konvektīvo atvasinājumu

Impulsa momenta plūsmas blīvuma vienādojuma kreiso pusi pēc iepriekš pierādītās sakarības (sk. 9.1.2.) pārraksta kā: $\rho\dfrac{d\tilde\ell_i}{dt} = \dfrac{\partial(\rho\tilde\ell_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho\tilde\ell_i v_k)}{\partial x_i}$.

Līdz ar to ir iegūts vienādojums: $\dfrac{\partial(\rho\tilde\ell_i)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho\tilde\ell_i v_k)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_m}(e_{ikl}x_k\sigma_{lm}) + e_{ikl}\sigma_{kl}$.

9.1.5. Secinājums par sprieguma tenzora simetriskumu

Impulsa momenta plūsmas blīvuma vienādojuma salīdzinājums ar lokālā saglabāšanās likuma formu

Iepriekš noskaidrots, ka lokālais saglabāšanās likums izpildās, ja lieluma izmaiņu laikā var izteikt ar diverģenci no kāda sprieguma tenzora:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde a_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde a_i v_k) = \frac{\partial\sigma_{im}}{\partial x_m}.$$

Iepriekš ieguvām impulsa momenta plūsmas blīvuma vienādojumu:

$$\frac{\partial(\rho\tilde\ell_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\tilde\ell_i v_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_m}(e_{ikl}x_k\sigma_{lm}) + \underset{(*)}{e_{ikl}\sigma_{kl}}$$

Ja vienādojuma loceklis (*) ir vienāds ar nulli

Redzams, ka gadījumā, ja loceklis (*), kurš raksturo kustības daudzuma avotus, būs nulle $e_{ikl}\sigma_{kl} = 0$, lokālais kustības daudzuma momenta plūsmas blīvuma saglabāšanās likums izpildīsies.

-------------- Sprieguma tenzora simetriskums

$e_{ikl}\sigma_{kl} = 0$ izpildīsies tikai tad, ka sprieguma tenzors σ_{kl} būs simetrisks, jo simetriska un antisimetriska tenzora konjugācija ir vienāda ar nulli. Sk. 12.2..

-------------- Pārbaude

Ja i=1, tad k=2 vai 3, un l = 2 vai 3, t.i. $e_{1kl}\sigma_{kl} = \sigma_{23} - \sigma_{23} = 0$. Līdzīgi var uzrakstīt arī priekš i=2,3. Tātad kopsumma gadījumā, ka σ_{kl} ir simetrisks, būs 0.

Ja vienādojuma loceklis (*) nav vienāds ar nulli

Redzams, ka gadījumā, ja loceklis (*), kurš raksturo kustības daudzuma avotus, nebūs nulle $e_{ikl}\sigma_{kl} \neq 0$, lokālais kustības daudzuma momenta plūsmas blīvuma saglabāšanās likums neizpildīsies.

-------------- Sprieguma tenzora antisimetriskums

Ja (*) nav nulle, tas nozīmē, ka šķidrumā darbojas kāds avots ar noteiktu jaudu un tāpēc kustības daudzuma momenta plūsmas blīvums nesaglabājas. Ja ir šķidrums, kurā suspendētas rotējošas daļiņas (hidrodinamika ar spinu), tad būs šādi avoti, kas raksturo kā daļiņas rotācijas kustības daudzumus pāriet mehāniskajā kustības daudzumā.

$e_{ikl}\sigma_{kl} \neq 0$ izpildīsies tad, ja sprieguma tenzors būs antisimetrisks, jo antisimetriska un antisimetriska tenzora konjugācija nav vienāda ar nulli.

-------------- Pārbaude

Ja i=1, tad k=2 vai 3, un l = 2 vai 3, t.i. $e_{1kl}\sigma_{kl} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = \sigma_{23} + \sigma_{23} \neq 0$. Līdzīgi var uzrakstīt arī priekš i=2,3. Tātad kopsumma gadījumā, ka σ_{kl} ir antisimetrisks, nebūs 0.

9.1.6. Cits veids, kā postulēt kustības daudzuma plūsmas blīvuma saglabāšanās likumu

.Var lasīt [15], 28.lpp.

9.2. SPRIEGUMA TENZORA DIVAS DAĻAS

Dalambēra paradokss (sk. 3.2.2. Dalambēra paradokss) parāda, ka reāli šķidrumi nav ar ideāla šķidruma īpašībām. Tātad viskozos šķidrumos darbojas gan normālie spriegumi, ko nosaka spiediens (sk. 6.3.2. Spiediens šķidrumos), gan citi spriegumi (viskozie spriegumi jeb spriegumi, ko izraisa iekšējā berze (sk. 3.1.3.)), ko apzīmē ar τ_{ik}. Līdz ar to spriegumu tenzoru (sk. 6.2. Sprieguma tenzors) var uzrakstīt kā divu tenzoru summu: $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$

9.2.1. Normālo spriegumu tenzors

Izteiksmes $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$ pirmo saskaitāmo $-p\delta_{ik}$ sauc par normālo spriegumu tenzoru. Sk. 6.3.2. Spiediens šķidrumos. Šī sprieguma tenzora sastāvdaļa raksturo to impulsa plūsmas daļu, kura saistīta ar impulsa pārnesi kopā ar masu

9.2.2. Viskozo spriegumu tenzors

Izteiksmes $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}$ otro saskaitāmo τ_{ik} sauc par viskozo spriegumu tenzoru, tas nosaka to impulsa plūsmas daļu, kas nav saistīta ar impulsa pārnesi kopā ar masu. Tagad jāmēģina noteikt viskozo spriegumu tenzora komponentes.

9.3. VISPĀRĪGI SPRIEDUMI PAR VISKOZO SPRIEGUMU TENZORA KOMPONENŠU NOSKAIDROŠANU

9.3.1. Kā atras viskozo spriegumu tenzora koeficientus

Šos koeficientus uzzina fenomenoloģiskās teorijas ietvaros, t.i eksperimentāli. Ir Bolcmaņa teorija, kura apraksta viskozo spriegumu tenzora aprēķināšanas procesu tieši gāzēm, tā ir gāzu kinētiskā teorija. Par viskozo spriegumu tenzoru var izdarīt secinājumus, balstoties uz vides izotropiju, telpas simetriju utml., tādējādi samazinot eksperimentāli nosakāmo koeficientu skaitu.

9.3.2. Viskozo spriegumu atkarība no ātruma maiņas telpā

______Šķidrumu iedalījums atkarībā no viskozo spriegumu atkarības no ātruma maiņas linearitātes

Ir saprotams, ka viskozie spriegumi nevarētu būt mainīgi vienmērīgā kustībā, tātad tie ir atkarīgi no ātruma izmaiņām telpā jeb ātruma atvasinājuma – t.i. dažādu slāņu kustības ar dažādiem ātrumiem.

_______Ņūtona šķidrumi

Ja spriegumi atkarīgi no ātruma gradientiem lineāri. Šeit tiks apskatīti tieši šādi šķidrumi.

Neņūtona šķidrumi

Ja spriegumi atkarīgi no ātruma gradienta nelineāri. Ar to nodarbojas reoloģija (piem. asins kustība u.c. šķidrumu kustība ķermenī).

Secinājumi, kas rodas pētot šķidruma taisnvirziena kustību ar nemainīgu ātrumu

Vai šķidrumā var rasties viskozie spriegumi, ja visos telpas punktos šķidrums kustās ar nemainīgu ātrumu? Nē! Piemēram, pārnesot lēnām bļodu ar ūdeni, nekas ar ūdeni traukā nenotiek. Tātad viskozo spriegumu tenzoram jābūt vienādam ar nulli, ja ātrums ir telpā nemainīgs un šie viskozie spriegumi rodas tikai tad, ja ātrums mainās no punkta uz punktu. To var aprakstīt ar kustības ātruma gradientu.

Viskozo spriegumu tenzora vispārīgs pieraksts lineārā tuvinājumā

Iepriekš teiktais liek secināt, ka visiem viskozā sprieguma tenzora locekļiem jāsatur ātrumu atvasinājumi. Ātrumam ir 3 komponentes. Šīs trīs komponentes katra jāatvasina atkal pēc 3 mainīgajiem. Tātad viskozo spriegumu tenzoram jābūt vismaz 9 komponentēm.. Tā tas ir pirmajā tuvinājumā.

Principā varētu viskozo spriegumu tenzora izteiksmē iekļaut arī otrās un augstāku kārtu ātruma atvasinājumus (eksistē tādi gāzu kustības modeļi), tomēr gadījumā, kad ātrums mainās pietiekoši lēni, šo izmaiņu labi raksturo arī pirmās kārtas atvasinājumi. Tātad vispārīgā gadījumā lineārā tuvinājumā viskozo spriegumu tenzoru var pierakstīt kā: $\tau_{ik} = A_{iklm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$, jeb sakarības starp ātruma atvasinājumiem un viskozo spriegumu apraksta ceturtā ranga tenzors A_{iklm}, kurā ir jābūt attiecīgi 81 kooeficientam.

Secinājumi, kas rodas pētot šķidruma vienmērīgas rotācijas kustību

Var redzēt, ka vienmērīgi rotējot ar šķidruma slāņiem nenotiek nekādi procesi. Tātad viskozo spriegumu tenzoram jābūt vienādam ar nulli arī tad, ja šķidrums vienmērīgi rotē. Tāda ātrumu atvasinājumu lineārā kombinācija, kas atbilstu šim nosacījumam, izskatās šādi: $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$

9.4. VISKOZO SPRIEGUMU TENZORA IZSKATS

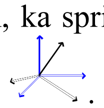
9.4.1. Viskozo spriegumu tenzora nezināmo koeficientu skaits

9.3. nodaļā ir noskaidrots, ka viskozo spriegumu tenzoru var mēģināt pierakstīt šādā veidā: $\tau_{ik} = A_{iklm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$ jeb sakarības starp ātruma atvasinājumiem un viskozo spriegumu apraksta ceturtā ranga tenzors A_{ikpr}. Lai izveidotu pilnīgu viskozo spriegumu aprakstu, tātad ir nepieciešams uzzināt 81 koeficientu. Zināms arī, šim tenzoram attiecībā pret indeksiem "i,k" jābūt simetriskam (sk. 9.1.5.), tātad jāatrod 54 koeficienti.

Jautājums, kādi spriegumi rodas vidē, ja materiālo elementu deformē. To nosaka simetrija materiālā. Uzdevumu vienkāršo tas, ka parasti tiek apskatīti izotropi šķidrumi.

9.4.2. Koeficientu matricas izskats

Teorēma par koeficientu matricas invarianci attiecībā pret griešanas operāciju

Pieņemsim, ka sprieguma tenzors dots vienā koordinātu sistēmā, tad koordinātu sistēma tiek pagriezta: . Ja pāriet uz citu koordinātu sistēmu, arī tenzors A_{iklm} izmainās:

$\tau'_{ik} = A'_{iklm}\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right)'$. Tā kā ātruma gradienti un spiedieni uz jaunajām asīm ir tie paši (jo vide ir izotropa), tad var rakstīt: $\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right) = \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right)'$ un $\tau'_{ik} = \tau_{ik}$, tātad arī

$$A'_{iklm} = A_{iklm}.$$

Pierādījums

Vektoru transformācijas formula, pārejai jaunās koordinātēs

Uzraksta, kā pārveidojas vektoru komponentes, pārejot no vienas koordinātu sistēmas uz citu koordinātu sistēmu: $a_i\vec{e}_i = a'_k\vec{e}'_k \;\Rightarrow\; a'_k = a_i\left(\vec{e}_i, \vec{e}'_k\right)$. Tātad jauno koordinātu saistību ar vecajām var izteikt ar matricas $\alpha_{ki} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}'_k\right)$ palīdzību: $a'_k = \alpha_{ki}a_i$. No definīcijas seko: $\vec{e}_i = \alpha_{ki}\vec{e}'_k$ kas arī ir vielas izotropijas nosacījums. Tātad α_{ki} raksturo leņķus starp jauniem un veciem ortiem.

-------------- Pierāda, ka α ir unitāra matrica

$\vec{e}_i = \alpha_{ki}\vec{e}'_k$ pareizina skalāri ar $\vec{e}_m = \alpha_{lm}\vec{e}'_l$:

$\underbrace{\vec{e}_i\vec{e}_m}_{=\delta_{im}} = \alpha_{ki}\alpha_{lm}\underbrace{\vec{e}'_k\vec{e}'_l}_{=\delta_{kl}} \Rightarrow \alpha_{ki}\alpha_{km} = \delta_{im}$ (α - ortogonāla matrica). Tātad $\alpha^T\cdot\alpha = I$ (vienības matrica). Spēkā arī $\alpha\cdot\alpha^T = I$. Tātad α ir unitāra matrica. det(α) = 1.

Tātad var izteikt vektoru komponentes caur vecajām komponentēm.

Tenzoru transformācijas formula, pārejot uz jaunām koordinātēm

Līdzīgi kā vektoru koordinātes, pārveidojas arī tenzora komponentes – kā vektoru komponenšu reizinājums, t.i. $C'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}C_{lm}$. Nepagrieztā koordinātu sistēmā viskozo spriegumu tenzoru izteica kā $\tau_{ik} = A_{iklm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$, tātad pagrieztā tas izsakās kā: $\tau'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}\tau_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}A_{iklm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$. Tāpat izsaka $\frac{\partial v_r}{\partial x_p} = \alpha_{sr}\alpha_{tp}\frac{\partial v'_s}{\partial x'_t}$. Ievietojot iegūst: $\tau'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}\alpha_{sr}\alpha_{tp}A_{iklm}\frac{\partial v'_s}{\partial x'_t}$. Šeit ir pierādīts, ka A_{iklm} ir tenzors. Tātad $A'_{ikts} = \alpha_{il}\alpha_{km}\alpha_{sr}\alpha_{tp}$. Šī formula spēkā vienmēr, nav atkarīga no vielas simetrijas īpašībām. Ja jaunajā koordinātu sistēmā ir tādi paši ātruma gradienti kā vecajā, tad jābūt tādiem pašiem arī spriegumiem - $A'_{iklm} = A_{iklm}$

Tātad tenzoram jābūt invariantam pret griešanas grupas transformācijām.

Koeficientu matricas A_{iklm} izskats

Bez pierādījuma. Var parādīt, ka vienīgais veids, kā var izskatīties materiāla elementa koeficientu matrica ar vajadzīgajām īpašībām, ir sekojošs:

$$A_{iklm} = \mu_1\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu_2\delta_{il}\delta_{km} + \mu_3\delta_{im}\delta_{kl}.$$

Šai matricai attiecībā pret indeksiem “ik” jābūt simetriskai (sk. 9.1.5.), tādēļ $\mu_2 = \mu_3$.

9.4.3. Viskozo spriegumu tenzors

Viskozo spriegumu tenzora izskats

Iepriekš ir iegūts, ka viskozo spriegumu tenzors izskatās:

$$t_{ik} = A_{iklm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \left(\mu_1\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu_2\left(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$$

Apskatīsim, ko iegūst reizinājumā: $\delta_{lm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \sum_m \frac{\partial v_m}{\partial x_m} = \operatorname{div}\vec{v}$.

Līdzīgi $\delta_{il}\delta_{km}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \delta_{km}\frac{\partial v_m}{\partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ un $\delta_{im}\delta_{kl}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \delta_{kl}\frac{\partial v_i}{\partial x_l} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, tātad iegūstam:

$$t_{ik} = \mu_1\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{v} + \mu_2\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Fenomenoloģisko koeficientu ieviešana, viskozo spriegumu tenzora dalījums divās daļās

Fenomenoloģiskos koeficientus var ieviest kā ērtāk lietotājam, tāpēc tos ievieš tā, lai atsevišķi būtu atdalīta daļa, kura raksturo materiālā elementa tilpuma izmaiņas ātrumu, t.i. šī daļa raksturos spriegumus, kas rodas, mainoties tilpumam. Otrā daļā būs koeficienti, kas raksturos, kas notiek, ja tilpums nemainās.

Pārraksta viskozo spriegumu tenzora formulu:

$$t_{ik} = \mu_1\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{v} + 2\left(\mu_2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{v}\delta_{ik}\right)\right) + \frac{2}{3}\mu_2\operatorname{div}\vec{v}\delta_{ik}$$

$$t_{ik} = \underbrace{\left(\mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2\right)\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{v}}_{(*)} + \underbrace{2\mu_2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{v}\delta_{ik}\right)}_{(**)}$$

Tātad gan (*), gan (**) var izteikt kā kaut kādus tenzorus. (*) tenzora diagonālo locekļu summa būs atšķirīga no nulles, jo šī daļa raksturos šķidruma saspiešanos vai izplešanos (sk. 6.3. Sprieguma tenzora analīze). Tātad viskozo spriegumu tenzora (*) daļa pazūd tad, ja šķidrums ir nesaspiežams (sk.5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums).

Šis izvedums ir spēkā gadījumā, kad ātrums mainās pietiekoši lēni.

Viskozitātes koeficienti

Koeficientus viskozo spriegumu izteiksmē pārsauc:

$$\mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2 = \zeta \text{ un } \mu_2 = \eta.$$

Pieņem, ka šie koeficienti ir konstantes, kas nav atkarīgas no telpiskām koordinātēm. Principā šie koeficienti tomēr var būt atkarīgi no koordinātēm. Šo koeficientu vērtības nosaka eksperimentāli.

$$t_{ik} = \zeta\cdot\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{v} + 2\eta\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{v}\delta_{ik}\right)$$

Tilpuma viskozitātes koeficients

Koeficientu $\zeta = \mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2$ sauc par tilpuma viskozitātes koeficientu. Šis koeficients ir būtisks tikai saspiežamiem šķidrumiem. Tilpuma viskozitāte vienmēr lielāka par 0.

Bīdes jeb dinamiskās viskozitātes koeficients

Koeficientu $\eta = \mu_2$ sauc par bīdes viskozitātes koeficientu. Nesaspiežamiem šķidrumiem viskozo spriegumu tenzoru raksturo tikai šis vienīgais koeficients. Pie dotās temperatūras šis koeficients nav atkarīgs no spiediena. Bīdes viskozitāte vienmēr lielāka par 0

Kinemātiskās viskozitātes koeficients

Lielumu $\upsilon = \frac{\eta}{\zeta}$ sauc par kinemātisko viskozitāti.

Dažas η un ν vērtības vielām pie T=20°

	$\eta\left[\mathrm{g}/\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}\right]$	$\nu\left[\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}\right]$
ūdens	0,01	0,01
gaiss	$1{,}8\cdot10^{-4}$	0,15
glicerīns	8,5	6,8
dzīvsudrabs	0,0156	0,0012

9.5. SPRIEGUMA TENZORA PILNĀ IZTEIKSME

Sprieguma tenzors saspiežamiem šķidrumiem:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \zeta\cdot\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{v} + \eta\cdot\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\vec{v}\,\delta_{ik}\right) \text{ jeb}$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \zeta\cdot\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} + \eta\cdot\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)$$

Sprieguma tenzors nesaspiežamiem šķidrumiem:

Nesaspiežamiem šķidrumiem spēkā nesaspiežamības nosacījums (sk. 5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums), tāpēc

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\cdot\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$$

10. NAVJĒ – STOKSA VIENĀDOJUMS JEB KUSTĪBAS VIENĀDOJUMS VISKOZAM ŠĶIDRUMAM

10.1. NAVJĒ – STOKSA VIENĀDOJUMA VISPĀRĪGAIS IZSKATS

10.1.1. Navjē – Stoksa vienādojuma iegūšana

Ievietojot iegūto sprieguma tenzora izteiksmi (sk. 9.5. Sprieguma tenzora pilnā izteiksme) nepārtrauktas vides kustības vienādojumā (sk. 7.1.2.), iegūst:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial(p\delta_{ik})}{\partial x_k}+\zeta\cdot\frac{\partial\left(\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)}{\partial x_i}+\eta\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\zeta\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}+\eta\cdot\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\eta\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}-\eta\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

10.1.2. Navjē – Stoksa vienādojuma izskats dažādos gadījumos

Saspiežamiem šķidrumiem

ar neizvērstu konvektīvo locekli

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\eta\cdot\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\ \text{jeb}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla p+\eta\cdot\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\vec{v})\ \text{jeb}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\text{gra}\partial p+\eta\cdot\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\text{gra}\partial\,\text{div}\vec{v}$$

ar izvērstu konvektīvo locekli

Sk. 2.3. Konvektīvais atvasinājums.

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\nabla)\vec{v}=-\text{gra}\partial p+\eta\cdot\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\text{gra}\partial\,\text{div}\vec{v}\ \text{jeb}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}=-\text{gra}\partial p+\eta\cdot\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\text{gra}\partial\,\text{div}\vec{v}$$

Nesaspiežamiem šķidrumiem

Nesaspiežamiem šķidrumiem spēkā $\text{div}(\rho\vec{v})=0$ (sk. 5.5.1. Nesaspiežamības nosacījums), tāpēc:

ar neizvērstu konvektīvo locekli

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=-\text{gra}\partial p+\eta\cdot\Delta v_i$$

ar izvērstu konvektīvo locekli

Sk. 2.3. Konvektīvais atvasinājums.

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}=-\text{gra}\partial p+\eta\cdot\Delta\vec{v}$$

10.2. VIENĀDOJUMI, KAS NEPIECIEŠAMI PILNĪGAM VISKOZU ŠĶIDRUMU KUSTĪBAS APRAKSTAM

10.2.1. Nepārtrauktības likums

Sk. 5.2. Nepārtrauktības vienādojuma izvedums.

No masas saglabāšanās likuma tika iegūts: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\rho\vec{v}=0$.

Šis ir viens vienādojums blīvumam.

10.2.2. Navjē – Stoksa vienādojums

Sk. 10.1. Navjē – Stoksa vienādojuma vispārīgais izskats

Šķidruma paātrinājumu, ko rada dažādi spēki, kas darbojas šķidrumā, nosaka Navjē – Stoksa vienādojums:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho v_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}=-\mathrm{grad}\,p+\eta\cdot\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v}$$

Šeit uzrakstīti 3 vienādojumi trim ātruma komponentēm

10.2.3. Siltumapmaiņas vienādojums

Sk. 8.1.5. Siltumapmaiņas vienādojums

Spiedienu aprakstam ar Mendeļejeva - Klapeirona stāvokļa vienādojumu pV=RT.

Iekšējās enerģijas pāreju citos šķidruma enerģijas veidos, nosaka vienādojums temperatūrai:

$$\rho\tilde{C}_p\frac{dT}{dt}=T\beta\frac{dp}{dt}+\tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\mathrm{div}\vec{q}\,,\ \text{kur}\ \beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_p,\ \mathrm{div}\vec{q}=-\lambda\,\mathrm{grad}\,T$$

Šeit uzrakstīts, kā atrast spiedienu

10.3. NAVJĒ-STOKSA VIENĀDOJUMS PLŪSMĀM DAŽĀDIEM REINOLDSA SKAITĻIEM, [15] - 86.lpp., [35] – 271.lpp.

10.3.1. Līdzības likums.

Kāpēc svarīgs līdzības likums

Pētot viskozus šķidrumus, balstoties uz dažiem, ar fizikālu lielumu dimensijām saistītiem vienkāršiem apsvērumiem, var iegūt virkni būtisku rezultātu.

Lai noteiktu, kā iegūtos vienādojumus (sk. 10.2. Vienādojumi, kas nepieciešami pilnīgam viskozu šķidrumu kustības aprakstam) ietekmē tieši šķidrumu raksturojošie parametri ρ un μ, nevis vienādojuma mērvienību maiņa, japacenšas uzrakstīt minētos vienādojumus bezdimensionālā formā.

Apskatīsim kādu noteiktu kustības tipu - noteiktas formas ķermeņa kustību caur šķidrumu. Ja ķermenis nav lode, tad jābūt norādītam, kādā virzienā tas kustās, piemēram, elipsoīda kustība tā lielās ass virzienā utt. Var būt runa arī par šķidruma plūsmu apgabalā, ko norobežo noteiktas formas sieniņas (piem. pa noteikta diametra cauruli).

Ģeometriskā līdzība

Par vienādas formas ķermeņiem saucam ģeometriskās līdzības ķermeņus, t.i. tādus, kurus var iegūt vienu no otra, proporcionāli izmainot to lineāros izmērus. Tāpēc, ja ir dota ķermeņa forma, tad ķermeņa izmēru noteikšanai pilnībā pietiek uzdot kādu no tā lineārajiem izmēriem (piem. lodes vai cilindriskas caurules rādiusu).

Plūsmas raksturlielumi

Mēs apskatīsim stacionāru kustību. Tāpēc tekošā šķidruma ātrumam jābūt nemainīgam. Šķidrumu mēs uzskatīsim par nesaspiežamu. Apskatīsim Navjē-Stoksa vienādojumu nesaspiežamiem šķidrumiem: $\frac{dv_i}{dt}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\frac{\eta}{\rho}\cdot\Delta v_i$. Nezināmās funkcijas, kuras jānosaka risinot vienādojumus, ir ātrums $\vec{v}$ un spiediens p.

Bez tam, šķidruma plūsmas atkarību no kustošā ķermeņa formas un ātruma, izsaka ar robežnosacījumiem.

Raksturīgais izmērs

Pieņemsim, ka ķermeņa forma ir dota, tad tā ģeometriskās īpašības var tikt noteiktas ar jebkuru vienu lineāru izmēru, ko mēs apzīmē ar **l** un sauc par raksturīgo izmēru.

-------------- Lineārā izmēra bezdimensionālā izteiksme

Visus lineāros izmērus, kas sastopami vienādojumā, var izteikt, balstoties uz šo raksturīgo izmēru. Līdz ar to var rakstīt, ka bezdimensionālais attālums **x'** var tikt izteikts ar dimensionālo attālumu **x** un raksturīgo izmēru **l** ([**l**]=cm) šādi: $\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{\mathbf{l}}$

Raksturīgais ātrums

Plūsmas ātrums tālu no ķermeņa ir **u**. To var pieņemt par visu plūsmu raksturojošu raksturīgo ātrumu.

-------------- ātruma bezdimensionālā izteiksme

Tad jebkuru ātrumu var izteikt ar plūsmas raksturīgo ātrumu **u** ([**u**]=cm/s) šādi: $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\mathbf{u}}$

Viskozitētes koeficients

Pašu šķidrumu raksturojošs lielums šajā vienādojumā ir tikai viskozitātes (sk. 9.4.3. Viskozitātes koeficienti) koeficienta dalījums ar šķidruma blīvumu $\frac{\eta}{\rho}$.

-------------- Viskozitātes koeficienta bezdimensionālā forma

Viskozitātes koeficienta dalījumu ar šķidruma blīvumu var bezdimensionalizēt sekojošā veidā. Tā kā $\left[\frac{\eta}{\rho}\right] = \frac{g}{s \cdot cm} : \frac{g}{cm^3} = \frac{cm^2}{s}$, tad $\frac{\eta'}{\rho'} = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{l}}$

10.3.2. Reinoldsa skaitlis

Reinoldsa skaitlis – bezdimensionāla kombinācija no plūsmas raksturlielumiem

Viegli pārliecināties, ka no plūsmas parametriem var sastādīt tikai vienu neatkarīgu bezdimensionālu kombināciju, proti $\mathsf{R} = \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} \cdot \rho}{\eta}$. Šo kombināciju sauc par Reinoldsa skaitli un apzīmē ar R. Jebkurš cits bezdimensionāls parametrs var tikt izteikts kā funkcija no R.

Līdzīgas plūsmas

No šīs izteiksmes ir redzams, ka viena tipa divās dažādās plūsmās (piem. dažāda diametra sfēru aptecēšana ar dažādu viskozitāšu šķidrumiem) ātrumi **v**/**u** ir attiecības **r**/**l** vienādas funkcijas, ja vien Reinoldsa skaitlis abos gadījumos ir vienāds. Plūsmas, kuras var iegūt vienkārši pamainot koordinātu un ātrumu mērogu, sauc par līdzīgām. Tādā veidā vienāda tipa plūsmas ar vienādiem Reinoldsa skaitļiem ir līdzīgas – līdzības likums.

Dažādas funkcijas

-------------- Ātrumu lauks

Tā kā vienīgais bezdimensionālais parametrs ir Reinoldsa skaitlis, tad skaidrs, ka hidrodinamisku vienādojumu risināšanas rezultātā iegūtais ātrumu lauks ir šāda veida funkcija **v**=**u**·**f**(**x**/**l**,R).

-------------- Spiedienu lauks

Analoģisku formulu var uzrakstīt spiedienu sadalījumam šķidrumā. Tam no plūsmas parametriem vajag sastādīt kaut kādu lielumu ar spiediena dimensiju, kā tādu lielumu izvēlēsimies, piemēram $\mathbf{u}^2$, kas dalīts ar ρ. Tad var apgalvot, ka $p/\rho\mathbf{u}^2$ būs funkcija no bezdimensionāla mainīgā **x**/**l** un bezdimensionāla parametra R. Tādā veidā p=ρ·**u**2·f(**x**/**l**,R).

-------------- Spēka lauks

Visbeidzot analoģiskus apsvērumus pielietosim lielumiem, kas raksturo šķidruma plūsmu, bet nav koordinātu funkcijas. Tāds ir, piemēram, uz aptekamo ķermeni darbojošais pretestības spēks **F**. Precīzāk var apgalvot, ka bezdimensionāla F attiecība pret no η, $\mathbf{u}$, $\mathbf{l}$, ρ sastādīta lieluma ar spēka dimensiju ir jābūt funkcijai tikai no Reinoldsa skaitļa. Kā norādīto kombināciju var ņemt, piemēram, reizinājumu $\rho\mathbf{u}^2\mathbf{l}^2$. Tad $\mathbf{F}=\rho\mathbf{u}^2\mathbf{l}^2 f(\mathsf{R})$

Bezdimensionāli koeficienti sistēmā ar gravitācijas lauku

Ja smaguma spēka ietekme uz kustību ir būtiska, tad kustību nosaka nevis trīs, bet četri parametri: $\mathbf{l}$, $\mathbf{u}$, η/ρ un smaguma spēka paātrinājums **g**. No šiem parametriem var sastādīt ne vairs vienu, bet divas neatkarīgas bezdimensionālas kombinācijas. Kā tādas var izvēlēties Reinoldsa skaitli un Fruda skaitli, kas ir $\mathsf{F}=\mathbf{u}^2/\mathbf{l}\mathbf{g}$

Formulās funkcija f tagad būs atkarīga ne no viena, bet no diviem parametriem (R un F), un plūsmas būs līdzīgas tikai pie abu šo skaitļu vienādības.

10.3.3. Navjē-Stoksa vienādojumu vienkāršošana atkarībā no plūsmas Reinoldsa skaitļa.

Navjē – Stoksa vienādojuma bezdimensionalizācija

Mēģināsim vienkāršot Navjē-Stoksa vienādojumu $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+v_i\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{gra}\partial p+\frac{\eta}{\rho}\cdot\Delta\vec{v}$, vispirms bezdimensionalizējot tā locekļus un izmantojot bezdimensionālo plūsmas raksturlielumu kombināciju – Reinoldsa skaitli $\mathsf{R}=\frac{\mathbf{l}\cdot\mathbf{u}\cdot\rho}{\eta}$. Bezdimensionālos lielumus apzīmē ar "′ ".

Bezdimensionālais spiediens

No plūsmas raksturlielumiem sastāda kombināciju ar spiediena dimensiju: $[p]=\left[\frac{\eta\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{l}}\right]$.

Līdz ar to $p'=\frac{p}{[p]}=p\cdot\frac{\mathbf{l}}{\eta\cdot\mathbf{u}}$

Bezdimensionoperatoru bezdimensionalizācija

Tā kā $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]=\left[\frac{1}{\mathbf{l}}\right]$, tad $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)'=\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\mathbf{l}$;

Tā kā $[\Delta]=\left[\frac{1}{\mathbf{l}^2}\right]$, tad $\Delta'=\Delta\cdot\mathbf{l}^2$

Tā kā $\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]=\left[\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{l}}\right]$, tad $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)'=\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{u}}$

Uzraksta Navjē – Stoksa vienādojumu ar bezdimensionāliem locekļiem:

$$\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{l}}\cdot\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t'}+\mathbf{u}\cdot u_i'\cdot\mathbf{u}\cdot\frac{1}{\mathbf{l}}\cdot\frac{\partial\vec{u}'}{\partial x_i'}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\mathbf{l}}\cdot\frac{\eta\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{l}}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\frac{\eta}{\rho}\cdot\mathbf{u}\cdot\frac{1}{\mathbf{l}^2}\cdot\Delta'\vec{u}'$$

$$\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{l}}\cdot\left(\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t'}+u_i'\frac{\partial\vec{u}'}{\partial x_i'}\right)=-\frac{\eta\cdot\mathbf{u}}{\rho\cdot\mathbf{l}^2}\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\Delta'\vec{u}'\right)$$

Abas vienādojuma puses izdala ar $\frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{l}}$, iegūst: $\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t'}+u_i'\frac{\partial\vec{u}'}{\partial x_i'}=-\frac{\eta}{\rho\cdot\mathbf{l}\cdot\mathbf{u}}\cdot\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\Delta'\vec{u}'\right)$ jeb

$$\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t'}+u_i'\frac{\partial\vec{u}'}{\partial x_i'}=\frac{1}{\mathsf{R}}\cdot\left(-\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\Delta'\vec{u}'\right)$$

Vienādojuma kreisajā pusē ir lielumi, kas raksturo inerces spēkus.
Vienādojuma labajā pusē ir lielumi, kas raksturo viskozos spēkus

Var redzēt, ka lielums $R = \dfrac{l \cdot u \cdot \rho}{\eta}$ raksturo attiecību starp inerces un viskoziem spēkiem.

Šķidrumu iedalījums, atkarībā no Reinoldsa skaitļa.

Ja Reinoldsa skaitlis ir mazs (R<<1)

Mazu Reinoldsa skaitļu gadījumā skaidrs, ka viskozitātes spēki ir daudz lielāki, nekā inerciālie spēki. Tātad plūsmām ar mazu Reinoldsa skaitli, inerces spēkus var neievērot kā mazākas kārtas lielumus.

Piemēram $\mathcal{R}_{H_2O} = \dfrac{l \cdot u \cdot 10^{-4}}{10^2} \sim 10^{-6}$. Tātad ūdenim inerces spēkus var neievērot.

Vienādojums plūsmām ar mazu Reinoldsa skaitli tātad ir uzrakstāms: $-\dfrac{\partial p'}{\partial x_i'} + \Delta' \vec{u}' = 0$

Ja Reinoldsa skaitlis ir liels (R>>1)

Tad inerciālie spēki ir daudzkārt lielāki par viskozajiem un līdz ar to viskozitātes spēku ieguldījumu var neievērot.

Vienādojums plūsmām ar lielu Reinoldsa skaitli tātad ir uzrakstāms: $\dfrac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + u_i' \dfrac{\partial \vec{u}'}{\partial x_i'} = 0$

11. STOKSA UZDEVUMS. LODĪTES APTECĒŠANA

11.1. VIENĀDOJUMI STOKSA UZDEVUMAM

Uzdevums pilnā nostādnē (Navjē-Stoksa vienādojums) ir ļoti sarežģīts (piem. upes ūdeņu kustība ap akmeni utml.). Lai tādu atrisinātu, būtu nepieciešams integrēt nelineārus diferenciālvienādojumus. Visos gadījumos, kad atrisinājumu var atrast analītiski, tiek ievēroti zināmi papildnosacījumi. Bieži tie saistīti ar vienādojumu linearizāciju. Šajā gadījumā pieņem, ka apskatāmā šķidruma plūsma ir ar mazu Reinoldsa skaitli (sk. 10.3.2.). Atrod vienādojumus, kas pilnībā nosaka plūsmas ar mazu Reinoldsa skaitli kustību.

11.1.1. Stoksa vienādojums

Ņemot vērā viskozitātes spēku daudz lielāko ietekmi uz šķidrumu (sk. 10.3.3.), Navjē – Stoksa vienādojumu nesaspiežamiem šķidrumiem (sk. 10.1.2.) var pārrakstīt:

$$-\nabla p + \eta \Delta \vec{v} = 0$$

Šis ir lineārs diferenciālvienādojums.

Aristoteļa fizika

Tas, tātad, apraksta šķidruma kustību bez inerces (t.s. Aristoteļa fizika) – ja spēki beidz savu iedarbību, tad šķidrums momentā apstājas.

11.1.2. Nesaspiežamības nosacījums

Kopā ar nepārtrauktības vienādojumu nesaspiežamam šķidrumam, kura blīvums ir laikā un telpā konstants (sk. 5.5.2.):

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

11.2. STOKSA UZDEVUMA NOSACĪJUMI

11.2.1. Uzdevuma nostādne

Dota nekustīga sfēra ar rādiusu R. Sfēru aptek lamināra šķidruma plūsma. Dots šķidruma lamināras plūsmas kustības ātrums $\vec{v}_0$ tālu no lodītes. Interesē kāds ir ātrumu sadalījums plūsmā (sk. 11.3.), kā atrast spiediena vērtību (sk. 11.4.) un ar kādu spēku lodīte iedarbojas uz plūstošo viskozo šķidrumu (sk. 11.5.).

Uzdevums ir ekvivalents tādam, kur nekustīgā šķidrumā ar noteiktu ātrumu kustās sfēra. T.i., arī šajā gadījumā ātrumu lauks būs identisks tam, kādu iegūst, risinot uzdevumu ar iepriekš izklāstītajiem paramatriem, tikai ar pretēju zīmi.

Uzdevuma formulējums laminārām plūsmām ar mazu Reinoldsa skaitli ir korekts un matemātiski var pierādīt atrisinājuma eksistenci un unitāti. To sauc par lienošo plūsmu tuvinājumu.

Vēsturiski vispirms tika uzrakstīts Eilera vienādojums (sk. 7.2.2.) pie R>>1, kad var neievērot viskozos spēkus, t.i. vienādojums ideālam šķidrumam.

11.2.2. Robežnosacījumi

Kaut arī uzdevumi ar nekustīgu lodīti kustīgā šķidrumā un kustīgu lodīti nekustīgā šķidrumā pēc savas būtības ir ekvivalenti, ir apsvērumi, kuru dēļ risinot ir izdevīgāk pieņemt, ka nekustīga ir tieši sfēra: tā kā robežnosacījumi ir uz sfēras virsmas, tad izdevīgāk, ka nekustīga ir tieši sfēra.

Robežnosacījums ātrumiem tālu no ķermeņa

Tālu no ķermeņa dots plūsmas ātrums: $v_n\big|_{|\vec{r}|\to\infty} = \vec{v}_0$. Šī vektora virzienu uzskata par polāro asi.

Robežnosacījumi ātrumiem uz sfēras virsmas

Nedeformējamības robežnosacījums jeb normālie ātrumi uz sfēras virsmas

Šķidrums nevar ielīt cietā ķermenī. Tas nozīmē, ka šķidruma ātruma komponentei normāles virzienā pret virsmu uz cietā ķermeņa virsmas jābūt vienādai ar 0: $v_n\big|_{|\vec{r}|=R}=0$. Tātad šķidruma kustības ātrums var būt vērsts tikai pa pieskari sfērai.

Pielipšanas robežnosacījums jeb tangenciālie ātrumi uz sfēras virsmas

Sfēras pieskarplaknē jebkurā virzienā darbojas viskozie spēki, kas cenšas noturēt šķidruma molekulas nekustīgas attiecībā pret ķermeņa virsmu, tātad: $\vec{v}_\tau\big|_{|\vec{r}|=R}=0$.

Robežnosacījums ātrumiem uz sfēras virsmas

Tātad seko, ka šķidruma kustības ātrums uz sfēras ir vienāds ar nulli: $\vec{v}\big|_S=0$

Robežnosacījums, ja sfēra ir šķidruma vai gāzes burbulis

Uzskata, ka gāzes burbulis ir nedeformējams. Tādā gadījumā virsmas sprieguma spēks ir pietiekoši liels, lai burbulis spētu saglabāt lodveida formu. Tātad $v_n\big|_{|\vec{r}|=R}=0$, bet pielipšanas robežnosacījums vairs nesaglabājas. Uz šķidrumu no burbuļa virsmas elementiem nedarbojas nekādi spēki, t.i. spēka tangenciālā komponente pret virsmu ir nulle. Līdz ar to nosacījums ir uzrakstāms: $\sigma_{\tau k}n_k=0$.

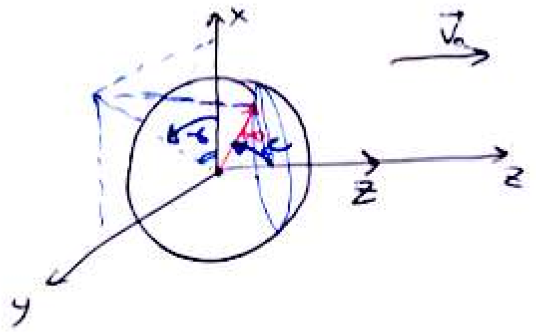
Robežnosacījumi, ja aptekamais objekts ir piliens

Piliena virsma ir nedeformējama, t.i. šķidruma kustības ātrums normāli piliena virsmai no abām pusēm ir vienādi ar nulli. Jāuzraksta nosacījums, ka spēkiem, kas darbojas uz prtējām virsmām, ir jākompensējas: $\sigma^1_{\tau k}n_k=\sigma^2_{\tau k}n_k$. Tangenciālie ātrumi uz piliena virsmas ir nepārtraukti $v_{\tau_1}=v_{\tau_2}$.

11.2.3. Spriedumi par plūsmas ātrumu sadalījumu un spēka eksistenci

Koordinātu sistēmas izvēle

Ievieš sfērisko koordinātu sistēmu (sk. 13.6. Sfēriskā koordinātu sistēma) ar centru sfēras centrā un z asi $\vec{v}_0$ virzienā.



Ātruma funkcijas izskats

Pret šo asi, kura ir paralēla plūsmas ātruma virzienam, kustība ir aksiāli simetriska, t.i. nav atkarīga no aksiālā leņķa φ. Kustība būs atkarīga no rādiusvektora $\vec{r}$ un leņķa ν, kas raksturo rādiusvektora vērsumu pret polāro asi.

Tātad ātruma funkciju var pierakstīt: $\vec{v}=\vec{v}\big(v_r(r,\nu),v_\nu(r,\nu),0\big)$, t.i. kustība azimutālā virzienā nenotiek. Ņemot to vērā, varēs aprēķināt, kāds spēks darbosies uz lodīti. Pamatojumu, kāpēc droši var secināt, ka uz sfēru laminārā plūsmā darbojas kāds spēks, sk. 3.2.2. Piemērs - sfēras aptecēšana.

11.3. ĀTRUMU LAUKA ATRAŠANA

11.3.1. Kas nepieciešams, lai atrastu ātruma lauku

Stoksa vienādojumā (sk. 11.1. Vienādojumi Stoksa uzdevumam) ir divi nezināmie – spiediens un ātrums. Izmantojot nesaspiežamības nosacījumu $\operatorname{div}\vec{v}=0$, var uzrakstīt tādu vienādojumu, kurā ir tikai viens mainīgais - ātrums. Šo vienādojumu tad arī varētu aprēķināt.

11.3.2. Laplasa operatora pārveidojums Stoksa vienādojumā

Ņem vērā Laplasa operatora īpašību: $\Delta\vec{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$. No nesaspiežamības nosacījuma $\operatorname{div}\vec{v}=0$ seko, ka Laplasa operatoru Stoksa vienādojumā var aizstāt ar $\Delta\vec{v}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}$. Iegūst

$$\operatorname{gra\partial} p+\eta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=0$$

11.3.3. Vienādojums ātrumu laukam

Spiediena izslēgšana

Iegūst vienādojuma $\operatorname{gra\partial} p+\eta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=0$ rotoru. Rotors no gradienta $\nabla\times(\nabla p)$ ir vektora vektoriāls reizinājums ar vektora un skalāra reizinājumu. Tā kā rezultāts nemainīsies no tā, vai vispirms vektoru pareizinās ar skalāru un tad veiks vektoriālo reizinājumu, vai arī pirmos vektoriāli sareizinās abus vektorus, tad šo izteiksmi var pierakstīt: $[\nabla\times(\nabla p)]=[\nabla\times\nabla]p$. Tā kā vektora vektoriālais reizinājums pašam ar sevi ir vienāds ar nulli $[\nabla\times\nabla]=0$, tad iegūst:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=0\,.$$

11.3.4. Vienādojuma ar vienu mainīgo iegūšana.

Kā iegūt vienādojumu vienai ātruma komponentei

Vienādojumā $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=0$ ir divas ātruma komponentes, tās jāizsaka caur kādu vienu mainīgo. Šo funkciju var iegūt, aplūkojot nesaspiežamības nosacījumu $\operatorname{div}\vec{v}=0$.

Diverģence no ātruma

Atceroties, ka $v_\varphi=0$ (sk. 11.2.3. Spriedumi par plūsmas ātrumu sadalījumu un spēka eksistenci), aprēķina diverģenci sfēriskā koordinātu sistēmā (sk. 13.6.5. Diverģence sfēriskajā koordinātu sistēmā):

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{r^2\sin\nu}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r r^2\sin\nu\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(v_\nu r\sin\nu\right)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)+\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(v_\nu\sin\nu\right)=0$$

Iegūto izteiksmi var apmierināt, ja v_r un v_ν izsaka ar jaunas funkcijas (strāvas funkcijas Ψ) palīdzību.

Ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju

$$v_r=-\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\quad\text{un}\quad v_\nu=\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

Pārbaude

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\sin\nu\right)=$$

$$=-\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi^2}{\partial r\partial\nu}+\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi^2}{\partial\nu\partial r}\equiv 0$$

Redzams, ka ievietojot ātruma komponenšu izteiksmes diverģences aprēķina formulā, iegūst nulli, jo jaukto atvasinājumu rezultāts nav atkarīgs no atvasināšanas kārtības.

Strāvas funkcijas fizikālā jēga

Par strāvas funkciju sauc tādu funkciju, kuras vērtības paliek konstantas uz strāvas līnijām, kas sakrīt ar līnijām, pa kurām pārvietojas materiālās daļiņas. To, ka Ψ ir strāvas funkcija, uzreiz var pateikt, uzzīmējot plūsmas līnijas – tās sakrīt ar strāvas līnijām.

------------- Pierādījums, ka Ψ ir strāvas funkcija

Ja kustoties pa strāvas līniju rādiusvektora r koordināta mainās par dr un leņķis ν izmainās par dν, tad pieskares vektors pret strāvas līniju būs paralēls šim vektoram $\{dr, rd\nu\}$. Ja dotā līnija ir strāvas līnija, tad tas nozīmē, ka pieskares vektors ir paralēls ātruma vektoram, t.i. $\frac{dr}{rd\nu} = \frac{v_r}{v_\nu}$. Tātad strāvas funkcijai jāizpildās sakarībai: $drv_\nu - rv_r d\nu = 0$. Ievieto ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju, iegūst:

$$dr\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + r\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}d\nu = \frac{1}{r\sin\nu}\left(dr\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial\Psi}{\partial\nu}d\nu\right) = 0.$$

Redzams, ka uz strāvas līnijas strāvas funkcija paliek konstanta.

11.3.5. Vienādojums strāvas funkcijai

Tātad pārveidoto Stoksa vienādojumu (sk. 11.3.3. Vienādojums ātrumu laukam) $\mathrm{rotrotrot}\vec{v} = 0$ pārrakstīsim strāvas funkcijai (sk. 11.3.4. Ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju), līdz ar to būs iegūts vienādojums ar vienu nezināmu mainīgo – strāvas funkciju.

Rotors no ātruma

Sk. 13.6.6. Rotors sfēriskajā koordinātu sistēmā

$\mathrm{rot}\vec{v} = \left(-\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial v_\nu}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\nu)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\nu}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r\sin\nu}\cdot\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\nu$. Tā kā ne v_r, ne v_ν nav atkarīgi no φ, tad redzams, ka šim rotoram no nulles atšķiras tikai φ-tā komponente:

$$\mathrm{rot}_\varphi\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\nu)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\nu},$$

ievieto ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju, iegūst:

$$\mathrm{rot}_\varphi\vec{v} = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right) = \frac{1}{r\sin\nu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right)$$

rotors no ātruma ar L-operatoru

Iegūto izteiksmi var uzrakstīt īsāk, ieviešot L-operatoru:

$$\mathrm{rot}_\varphi\vec{v} = \frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}\Psi$$

L - operators

Ievieš operatoru $\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$

Rotors no ātruma rotora

Sk. 13.6.6. Rotors sfēriskajā koordinātu sistēmā

Redzams, ka $\mathrm{rotrot}\vec{v}$ būs r-tā un ν-tā komponente.

$$\mathrm{rotrot}\vec{v} = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sin\nu\cdot\mathrm{rot}_\varphi\vec{v}\right)\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\mathrm{rot}_\varphi\vec{v}\right)\vec{e}_\nu \Rightarrow$$

$$\mathrm{rot}_r\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sin\nu\cdot\frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}\Psi\right) = \frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{L}\Psi$$

$$\mathrm{rot}_\nu\mathrm{rot}\vec{v} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}\Psi\right) = -\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial r}\hat{L}\Psi$$

Rotors no ātruma rotora rotora

Redzams, ka $\mathrm{rotrot}\vec{v}$ komponentes izskatās analoģiskas uzbūves kā ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju tikai ar pretējām zīmēm.

Tātad analoģiski var secināt, ka $\mathrm{rotrotrot}\vec{v}$ būs tikai φ-tā komponente:

$$\text{rotrotrot}_{\varphi}\vec{v} = \frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}^2\Psi$$

Vienādojums strāvas funkcijai

Līdz ar to iegūts: $\frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}^2\Psi = 0$

11.3.6. Vienādojuma strāvas funkcijai atrisināšana

Jauniegūtie vienādojumi, kuri jāatrisina

Jāatrisina Vienādojums strāvas funkcijai $\frac{1}{r\sin\nu}\hat{L}^2\Psi = 0$.

Apzīmē $\hat{L}\Psi = f$. Tad var rakstīt: $\hat{L}f = 0$.

Strāvas funkcijas izskats

Kādai jābūt strāvas funkcijai

Zināms, ka tālu no ķermeņa kustības ātrumam jāsakrīt ar $\vec{v}_0$ polārās (z) ass virzienā. Tātad tālu no ķermeņa $\vec{v}$ komponentes ir: $v_r^{\infty} = v_0\cos\nu$; $v_{\nu}^{\infty} = -v_0\sin\nu$. Strāvas funkcijai jābūt tādai, kurai tālu no ķermeņa ir šāds izskats.

Strāvas funkcijas izskats

Uzmin, ka $\Psi = -\frac{1}{2}v_0 r^2\sin^2\nu$.

-------------- Pamatojums

Šāds izskats varētu tikt uzminēts tādēļ, ka $r^2\sin^2\nu$ ir rādiusvektora projekcija uz plakni, kas perpendikulāra polārai asij. Tātad strāvas vienādojumā rādiusvektors ir konstants, t.i. strāvas līnija ir paralēla ātruma vektora asij.

-------------- Pārbaude

Pārbauda, ka tāda veida sprieguma funkcija dos vēlamo ātrumu lauku: ātruma komponentēs, kas izteiktas ar strāvas funkciju ievieto strāvas funkciju. Iegūst:

$$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(-\frac{1}{2}v_0 r^2\sin^2\nu\right) = v_0\cos\nu \quad \text{un}$$

$$v_{\nu} = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}v_0 r^2\sin^2\nu\right) = -v_0\sin\nu,$$

kas ir tieši, kas bija jāiegūst.

11.3.7. Funkcijas f atrisinājums

f atrisinājuma izskats

Skatoties uz Strāvas funkcijas izskatu, var pieņemt, ka $\hat{L}f = 0$ atrisinājumu var meklēt formā:

$$f = A(r)\sin^2\nu$$

ar mainīgo atdalīšanas metodi.

f meklēšana

Ievietojot f, iegūst

$$\hat{L}f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right)A(r)\sin^2\nu = \sin^2\nu\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\sin\nu}{r^2}A(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\nu}\frac{\partial\sin^2\nu}{\partial\nu}\right) =$$

$$= \sin^2\nu\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\sin\nu}{r^2}A(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{2\sin\nu}{\sin\nu}\cos\nu\right) = \sin^2\nu\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{\sin\nu}{r^2}A(r)2\sin\nu$$

Vienādojums priekš jaunas funkcijas A

$$\hat{L}f = \sin^2\nu\left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2A}{r^2}\right) = 0$$

-------------- Atrod A(r)

Tātad jāpieprasa, lai funkcijai A izpildās $\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2A}{r^2} = 0$

Šis vienādojums ir invariants pret transformācijām ar koeficientu λ, t.i., aizvietojot r ar λr iegūst to pašu vienādojumu. Jaunās vienādojumu sistēmas vienādojumu atrisinājumam jāizskatās tāpat kā vecās, tas var būt tad, ja A ir r pakāpes funkcija. Tāpēc atrisinājumu meklē formā $A = r^\sigma$.

Ievietojot iegūst: $\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} - 2r^{\sigma-2} = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma-1) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = -1\end{cases}$.

-------------- Vispārīgais atrisinājums

$$A = Dr^2 + Cr^{-1}$$

-------------- Vispārīgā atrisinājuma analīze

Ja D≠0, tad $f = \hat{L}\Psi$, aug proporcionāli Dr^2 jeb $\text{rot}_\varphi \vec{v} = \frac{1}{r \sin \nu}\hat{L}\Psi$ pie lieliem r uzvedīsies kā $\frac{1}{r \sin \nu} Ar^2 \sin^2 \nu$, tātad rotors tieksies uz bezgalību, kaut gan vajadzētu, ka tas ir nulle. Lai panāktu nulli, pieņem, ka D = 0.

________Iegūtā funkcija A

$$A = Cr^{-1}.$$

______Iegūtā funkcija f

Līdz ar to $f = \frac{C}{r}\sin^2 \nu$

11.3.8. Strāvas funkcijas vienādojums

______Atrod strāvas funkcijas vienādojumu ar nezināmām konstantēm

Ievietojot atrasto f, iegūst: $\hat{L}\Psi = f$, tad $\hat{L}\Psi = \frac{C}{r}\sin^2 \nu$.

______Strāvas funkcijas meklēšana

Strāvas funkciju meklē formā $\Psi = A_1(r)\sin^2 \nu$.

________Atrod $A_1(r)$

Ievietojot iegūst nehomogēnu lineāru vienādojumu: $\frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} - \frac{2A_1}{r^2} = \frac{c}{r}$. Šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir iegūstams kā homogēnā vienādojuma atrisinājums, kam pieskaitīts partikulārais atrisinājums.

-------------- Homogēnā vienādojuma atrisinājums

Homogēna vienādojuma atrisinājums ir zināms (sk. f meklēšana): $A_{1hom} = ar^2 + br^{-1}$.

-------------- Partikulārā vienādojuma atrisinājums

Kā partikulāro ņem $A_1 = -\frac{cr}{2}$.

-------------- Vispārīgais A1(r) atrisinājums

Tad $A_1(r)$ vispārīgais atrisinājums ir $A_1 = ar^2 + br^{-1} - \frac{cr}{2}$

________strāvas funkcija

$$\Psi = \left(ar^2 + br^{-1} - \frac{cr}{2}\right)\sin^2\nu$$

Konstanšu noteikšana strāvas funkcijā

a

Konstanti a atrod no robežnosacījuma ātrumiem tālu no ķermeņa $v_n\big|_{|\vec{r}|\to\infty} = \vec{v}_o$.

ātruma komponentes izteiktas ar strāvas funkciju $v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}$

Tālu no lodes paliek tikai $\Psi = ar^2\sin^2\nu$, līdz ar to iegūst, ka $a = -\frac{\vec{v}_o}{2}$

b,c

Konstantes b, c atrod no robežnosacījumiem ātrumiem uz sfēras virsmas $v_r\big|_{|\vec{r}|=R} = 0$ un $\vec{v}_\nu\big|_{|\vec{r}|=R} = 0$. Izsaka vajadzīgās ātruma komponentes:

$$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = -\left(ar^2 + br^{-1} - \frac{cr}{2}\right)\frac{2\sin\nu}{r^2\sin\nu}\cos\nu = -\frac{2}{r^2}\left(ar^2 + br^{-1} - \frac{cr}{2}\right)\cos\nu$$

$$v_\nu = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\sin^2\nu}{r\sin\nu}\left(2ar - br^{-2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{\sin\nu}{r}\left(2ar - br^{-2} - \frac{c}{2}\right)$$

-------------- **Vienādojumu sistēma b,c atrašanai**

a ir zināms, r ir sfēras rādiuss R.

$$\begin{cases} -\frac{\vec{v}_o}{2}R^2 + bR^{-1} - \frac{cR}{2} = 0 \\ -\vec{v}_o R - bR^{-2} - \frac{c}{2} = 0 \Big| \cdot R \end{cases}$$

Otro vienādojumu atņem no pirmā, iegūst:

$$\frac{\vec{v}_o}{2}R^2 + 2bR^{-1} = 0 \Rightarrow\ b = -\frac{\vec{v}_o}{4}R^3$$

Ievieto b otrajā vienādojumā, iegūst:

$$-\vec{v}_o R + \frac{\vec{v}_o}{4}R - \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{3\vec{v}_o}{4}R = \frac{c}{2}$$

Iegūtā strāvas funkcija

$$\Psi = \left(-\frac{\vec{v}_o}{2}r^2 - \frac{\vec{v}_o}{4}R^3 r^{-1} + \frac{3\vec{v}_o}{4}Rr\right)\sin^2\nu$$

11.3.9. Ātrumu lauks

Ātruma komponentēs, kas izteiktas ar strāvas funkciju (sk. 11.3.4.) ievieto iegūto strāvas funkciju, iegūst:

$$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} = -\frac{2\sin\nu}{r^2\sin\nu}\left(-\frac{\vec{v}_o}{2}r^2 - \frac{\vec{v}_o}{4}R^3r^{-1} + \frac{3\vec{v}_o}{4}Rr\right)\cos\nu = \vec{v}_o\cos\nu\left(1 + \frac{R^3}{2r^3} - \frac{3R}{2r}\right)$$

$$v_\nu = \frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\sin\nu}{r}\left(-r\vec{v}_o + \frac{\vec{v}_o R^3}{4r^2} + \frac{3\vec{v}_o}{4}R\right) = \sin\nu\vec{v}_o\left(-1 + \frac{R^3}{4r^3} + \frac{3R}{4r}\right)$$

Iegūts ātrumu lauks

Tātad

$v_r = \vec{v}_o \cos\nu\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)$ un $v_\nu = \vec{v}_o \sin\nu\left(-1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right)$

Secinājumi par ātrumu lauku

Par redzamo iekavās

Redzams, ka ātruma perturbācijas, kas veidojas apkārt ķermenim ir proporcionālas $\frac{1}{r}$. Tātad izmaiņas dilst samērā lēni. Ja daudz daļiņas, tad tās jūt viena otru pa lieliem gabaliem. Tādējādi izpaužas daļiņu mijiedarbības tāldarbības efekts.

Par robežgadījumu

Var apskatīt robežgadījumu, kad R→0, tad $\frac{R}{r}$ - konstants. Tad iegūst fundamentālo Stoksa vienādojuma atrisinājumu. fundamentālais atrisinājums raksturo procesus ap punktveida avotu, t.i. spēkus, kas pielikti ķermenim konkrētā punktā.

11.4. SPIEDIENA ATRAŠANA

Stoksa vienādojumu, kurā ātruma diverģence aizstāta ar rotoriem $-\mathrm{gra}\partial p - \eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v} = 0$, projicē uz r-to un ν-to virzienu. Iepriekš tika iegūtas $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v}$ komponentes:

$\mathrm{rot}_r\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{L}\Psi$ un $\mathrm{rot}_\nu\mathrm{rot}\vec{v} = -\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial r}\hat{L}\Psi$

Šeit ievieto iepriekš aprēķināto $f = \hat{L}\Psi = \frac{C}{r}\sin^2\nu$

r-tais virziens: $-\frac{\partial p}{\partial r} - \eta\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{C}{r}2\sin\nu\cos\nu = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2C\eta\cos\nu}{r^3} = 0$

ν-tais virziena: $-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\nu} + \eta\frac{1}{r\sin\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C}{r}\sin^2\nu\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\nu} - \eta\frac{C\sin\nu}{r^3}$

Vienādojumu sistēma spiediena atrašanai

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2C\eta\cos\nu}{r^3} \\ \frac{\partial p}{\partial\nu} = -\eta\frac{C\sin\nu}{r^2} \end{cases}$$

No pirmā vienādojuma integrējot iegūst:

$$p = -\int\frac{2C\eta\cos\nu}{r^3}dr = -2C\eta\cos\nu\frac{1}{2r^2} + g(r) = \frac{C\eta\cos\nu}{r^2} + g(r)$$

Ievieto otrajā vienādojumā: $\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{C\eta\cos\nu}{r^2} + g(r)\right) = -\eta\frac{C\sin\nu}{r^2}$

$\frac{\partial g(r)}{\partial\nu} - \frac{C\eta\sin\nu}{r^2} + \frac{C\eta\sin\nu}{r^2} = 0$. Tātad $\frac{\partial g(r)}{\partial\nu} = 0$ un g(r) ir konstante, ko var pieņemt vienādu ar nulli g(r)=0 vai arī kādu citu konstantu spiediena vērtību p_o.

Spiediena izteiksme

Ievietojot spiediena izteiksmē iepriekš iegūto konstantes C vērtību $c = -\frac{3\vec{v}_o}{2}R$, iegūst:

$$p = -\frac{3}{2}\frac{\vec{v}_o \eta R \cos\nu}{r^2} + p_o$$

Secinājumi par spiedienu

Spiediens ap daļiņu nav sadalīts simetriski: ja ν=0, spiediens ir maksimāls (cos ν=1), ja ν=1, spiediens ir minimāls - nulle. Tātad uz daļiņu darbojas spēks. Pie tam šo spēku rada šķidruma viskozitāte. Ja η=0, tad nekāds spēks uz daļiņu nedarbosies.

11.5. SPĒKA APRĒĶINĀŠANA

11.5.1. Aprēķina spēku, ar kādu daļiņa iedarbojas uz šķidruma plūsmu spiediena nehomogenitātes dēļ.

Jāņem sprieguma tenzora izotropā daļa (Sprieguma tenzora daļa, kas nosaka statisko spiedienu) $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$.

Spēka i-tā komponente, kas darbojas uz virsmas elementu ar normāli k-tajā virzienā, ir $\sigma_{ik} n_k = -pn_i$

$F^{(1)} = -\int pn_i ds$

No simetrijas skaidrs, ka perpendikulāri simetrijas asij spēks nevar būt, jo tad tas izjauktu simetriju, tāpēc spēkam var būt komponente tikai z virzienā.

$F_z^{(1)} = -\int pn_z ds = -\int p\cos\nu ds$

Spiediena izteiksme sastāv no divām daļām – no konstantās p_o, kas spēka izteiksmē neko nedos, un nehomogēnās spiediena daļas, kas atkarīga no ν . Tikai šī nehomogēnā spiediena daļa dos ieguldījumu spēka izteiksmē.

$$F_z^{(1)} = -\int\left(-\frac{3\vec{v}_o\eta R\cos\nu}{2r^2}\right)\cos\nu ds\Bigg|_{x=R} = \frac{3}{2}\vec{v}_o\eta R\frac{1}{R^2}\int\cos^2\nu ds = \left|ds = r^2\sin\nu d\nu d\varphi\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\vec{v}_o\eta R\frac{R^2}{R^2}\int\cos^2\nu\sin\nu d\nu d\varphi = \frac{3}{2}\vec{v}_o\eta R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos^2\nu\sin\nu d\nu = \left|d\cos\nu = -\sin\nu d\nu\right| =$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{v}_o\eta R 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\nu d\cos\nu = -\frac{3}{2}\vec{v}_o\eta R 2\pi\frac{2}{3} = -2\pi\vec{v}_o\eta R$$

11.5.2. Aprēķina spēku, ko rada viskozie spriegumi

Sk. 13.6.7. Sprieguma tenzora komponentes sfēriskajā koordinātu sistēmā

$F_i^{(2)} = \int\tau_{ik}n_k ds$. Viskozie spriegumi τ_{ik} jāizsaka sfēriskajā koordinātu sistēmā. Spēks būs tikai z ass virzienā. Viskozie spriegumi jāprojicē uz z asi. Līdz ar to spēku var uzrakstīt sekojoši: $F_z^{(2)} = \int(\tau_{rr}\cdot\vec{e}_r + \tau_{\nu r}\cdot\vec{e}_\nu)ds = \int(\tau_{rr}\cdot\cos\nu - \tau_{\nu r}\cdot\sin\nu)ds$

Līdz ar to jāatrod viskozo spriegumu tenzora komponentes τ_{rr} un $\tau_{\nu r}$.

Sk. 13.3.1. Deformāciju ātruma tenzora komponenšu atrašanas formulas

$\tau_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} = 2\eta v_o\cos\nu\left(-\frac{3}{2}\frac{R^3}{R^4} + \frac{3}{2}\frac{R}{R^2}\right) = 0$ (sk. 11.3.9. Iegūts ātrumu lauks) Šeit tika aprēķināti normālie viskozie spriegumi. Šī komponente vienāda ar nulli un to var pamatot arī sekojoši: (sk. 11.2.2. Nedeformējamības robežnosacījums jeb normālie ātrumi uz sfēras virsmas).

$$\tau_{\nu r} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial r} - \frac{v_\nu}{r}\right)$$

v_ν uz sfēras ir vienāds ar nulli (sk. 11.2.2. Robežnosacījums ātrumiem uz sfēras virsmas)

$$\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = 0$$ (sk. 11.3.9. Iegūts ātrumu lauks)

$$v_r = \vec{v}_o \sin\nu\left(-1 + \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3}\right) \quad \frac{\partial v_\nu}{\partial r} = \vec{v}_o \sin\nu\left(-\frac{3R}{4r^2} - \frac{3R^3}{4r^4}\right)$$

Līdz ar to $\tau_{\nu r} = \eta \left.\frac{\partial v_\nu}{\partial r}\right|_{r=R} = -\eta\vec{v}_o \sin\nu \frac{3}{2R}$

Var secināt, ka vislielākie spriegumi ir uz ekvatora, kur saiet kopā plūsmas līnijas un ir vislielākais ātruma gradients.

Līdz ar to spēks, ar kādu nekustīga lodīte iedarbojas uz šķidrumu, ir šāds:

$$F_z^{(2)} = -\int\left(\tau_{rr}\cdot\vec{e}_r + \tau_{\nu r}\cdot\vec{e}_\nu\right)ds = -\int\eta\vec{v}_o \sin\nu\frac{3}{2R}\cdot\sin\nu ds = \left|ds = r^2\sin\nu d\nu d\varphi\right| =$$

$$= -\eta\vec{v}_o\frac{3R^2}{2R}2\pi\int\sin^3\nu d\nu = -4\pi\eta R\vec{v}_o$$

11.5.3. Stoksa pretestības spēks

Tātad summārais spēks, ar kādu lodīte iedarbojas uz šķidrumu jeb Stoksa pretestības spēks ir:

$$F_z = F_z^{(1)} + F_z^{(2)} = -6\pi\eta R\vec{v}_o$$

Pretestības koeficients

Ievieš jaunu lielumu pretestības koeficientu $\alpha_{pret} = 6\pi\eta R$

Tad Stoksa pretestības spēks ir $F_z = -\alpha_{pret}\vec{v}_o$

Pretestības koeficients kļūst svarīgs, ja apskata kādas vielas difūziju jeb izplatīšanos siltumkustības rezultātā kādā šķidrumā. Tad spēku, ar kādu daļiņas iedarbojas uz otru vielu, var aprēķināt pēc Stoksa pretestības spēka formulas, ņemot attiecīgo daļiņas izmēru. Ja zināms pretestības koeficients, ir spēkā slavena formula: $D = \frac{k_B T}{\alpha_{pret}}$. Izmantojot to, var rakstīt vielas koncentrācijas difūzijas vienādojumu $\frac{\partial C}{\partial t} = D\Delta C$. Ar šo vienādojumu var aprakstīt visādu piejaukumu izplatību.

12. DAŽĀDI NEPIECIEŠAMI APRAKSTI

12.1. PILNĪGI ANTISIMETRISKS TREŠĀ RANGA TENZORS - e_{ikl}

12.1.1. Pilnīgi antisimetriska trešā ranga tenzora īpašības

- tas ir pilnīgi antisimetrisks trešā ranga tenzors.
- tam jebkurā koordinātu sistēmā
  - Komponentes vērtība mainās uz pretējo, ja maina vietām divus indeksus (šī īpašība izriet no tenzora antisimetriskuma) $e_{ikl} = -e_{kil}$
  - Komponentes, kurās ir kādi vienādi indeksi, ir vienādas ar 0 (tādēļ, ka pēc pirmās īpašības, mainot vienādos indeksus vietām, vajadzētu mainīties komponentes zīmei. Bet tā kā iegūtā komponentes vērtība sakrīt ar iepriekšējo (tās ir vienādas), tas iespējams tikai tad, ja šīs komponentes vērtība ir 0) $e_{iil} = e_{kkl} = e_{kll} = ... = 0$. Tātad indeksi i, k,l ieiet katrs pa vienai reizei.
  - $e_{123} = 1$
  - Pārējo komponešu zīmes nosaka transpozīciju skaits, ar cik no [123] var iegūt doto indeksu kārtību. Nepāra transpozīciju skaits dod pozitīvu komponenti, pāra – negatīvu. Piem. $e_{123} = e_{231}$, jo $\frac{[123]}{[231]} = 1 \to 2; 2 \to 3; 3 \to 1$ Transpozīciju skaits ir 3, nepāra. Savukārt $e_{123} = -e_{132}$, jo $\frac{[123]}{[132]} = 1 \to 1; 2 \to 3; 3 \to 2$. Transpozīciju skaits ir 2, pāra (indekss "1" paliek uz vietas).

12.1.2. Pilnīgi antisimetrisks trešā ranga tenzors vektoriālā reizinājuma pierakstā

Ar e_{ikl} var ērti pierakstīt divu vektoru vektoriālo reizinājumu.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Šo izteiksmi, izmantojot e_{ikl}, var pārrakstīt šādi: $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_i = e_{ikl} a_k b_l$ (summēts tiek pēc "k" un "l").

Piemēram: ja i = 1, tad no 0 atšķirsies tās e_{ikl} vērtības, kurās k≠1 un l≠1. Tātad k var būt 2 un 3, l var būt arī 2 un 3, bet ne vienlaicīgi ar k. Tātad $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]_1 = e_{123} a_2 b_3 + e_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 (e_{123} = +1) - a_3 b_2 (e_{132} = -1)$, utt.

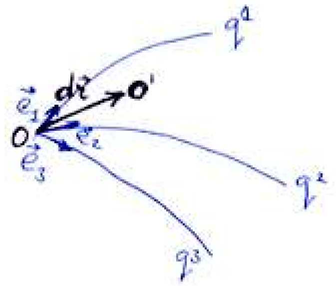
12.2. SIMETRISKA TENZORA UN ANTISIMETRISKA TENZORA KONJUGĀCIJA

Pierādījums, ka simetriska un antisimetriska tenzoru konjugācija ir vienāda ar 0.
Pieņemsim, ka dots antisimetrisks tenzors $a_{ik} = - a_{ki}$ un simetrisks tenzors $s_{ik} = s_{ki}$. Mums interesē lielums $I = a_{lm} \cdot s_{lm}$ (summē pēc "l" un "m"). Tā kā indeksus var apzīmēt brīvi, tad pārapzīmē tos kā: $I = a_{ml} \cdot s_{ml}$. Antisimetriskajam un simetriskajam tenzoram pielieto simetrijas īpašības: $a_{ml} \cdot s_{ml} = - a_{lm} \cdot s_{lm} = - I$. Redzams, ka iegūta pretruna I = - I. Tātad šādas konjugācijas vērtība var būt tikai 0.

13. KOORDINĀTU SISTĒMAS, KOORDINĀTU SISTĒMU MAIŅA

13.1. LĪKLĪNIJU KOORDINĀTU SISTĒMA

13.1.1. Līklīniju koordinātu sistēmas definējums



Trīsdimensionālā telpā katru punktu raksturo trīs skaitļi, t.i. katra punkta rādiusvektoru var uzrakstīt kā funkciju no trim mainīgajiem $\vec r = \vec r(q_1, q_2, q_3)$, kur $q_i = q_i(x,y,z)$. Par līklīniju koordinātu sistēmu to sauc tādēļ, ka ja $\vec r = \vec r(0,0,q_3)$, tad rodas līklīnija, kura tikai speciālgadījumā ir taisne.

13.1.2. Līklīniju sistēmas orti un metriskais tenzors

Vektors OO’

Vektors OO’, tātad, ir uzrakstāms kā visu asu koordinātu reizinājumu ar atbilstošo bāzes vektoru summu: $d\vec r = dq_i \cdot \vec e_i$

Bāzes vektori

Tātad bāzes vektoru, kuri vērsti pa koordinātu līniju pieskarēm, vienādojumi ir izsakāmi: $\vec e_i = \frac{d\vec r}{dq_i}$. Bāzes vektoru moduļi līklīniju sistēmā nav vienādi ar 1: $|\vec e_i| \neq 1$.

Orti un Lamē koeficients

Katrā telpas punktā krustojas trīs līnijas. Lai pateiktu, vai šīs līnijas ir ortogonālas, tām jāmāk konstruēt pieskares vienādojumi (bāzes vektoru vienādojumi). Lai iegūtu vienības vektoru - ortu, bāzes vektors ir jāizdala ar normējošu koeficientu, ko sauc par Lamē koeficientu:

$$\frac{\partial \vec r}{\partial q_i} \cdot \frac{1}{h_i}.$$

Metriskais tenzors

Attāluma kvadrātu var izteikt līklīniju koordinātēs ar metriskā tenzora palīdzību:

$$d\vec r \cdot d\vec r = (\vec e_i \cdot \vec e_j) dq_i dq_i = g_{ij} dq_i dq_i$$

Ortogonālās līklīniju koordinātēs metriskais tenzors ir diagonāls. Par Lamē koeficientiem sauc $\sqrt{g_{ii}} = h_i^2$. Metrisko tenzoru atrod, salīdzinot attāluma kvadrātus Dekarta un apskatāmajā līklīniju sistēmā.

sk. 13.6.4. Lamē koeficienti sfēriskajā koordinātu sistēmā
sk. 13.5.4. Lamē koeficienti cilindriskajā koordinātu sistēmā

13.2. DIVERĢENCE LĪKLĪNIJU KOORDINĀTU SISTĒMĀ

$$\operatorname{div}\vec a = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 h_2 h_3)}_{(*)} + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 h_1 h_2)\right)$$

(*) vektora $\vec{a}$ komponente orta e_l virzienā, utt.

13.3. SPRIEGUMA TENZORS LĪKLĪNIJU KOORDINĀTU SISTĒMĀ

13.3.1. Sprieguma tenzors ar deformāciju ātruma tenzoru

______Kā atrast sprieguma tenzoru līklīniju koordinātu sistēmā

Katrā punktā ir definēta Dekarta ortogonālā koordinātu sistēma un katrā punktā ir definēta līklīniju koordinātu sistēma, kas arī ir ortogonāla.

Spriegumu tenzora $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$ daļa, kas saistīta ar spiedienu, visās koordinātu sistēmās izskatās vienādi, tātad jāinteresējas, kā izskatās viskozo spriegumu tenzora daļa. Viskozo spriegumu tenzoru bieži dēvē arī par deformāciju ātruma tenzoru. Te jāņem vērā, kā pārveidojas tenzora komponentes, pārejot no vienas sistēmas uz otru. Vektoru $\vec{a}$ izsaka gan ar DOKS ortiem, gan līklīniju (ar ~): $\vec{a} = a_i\vec{e}_i = \tilde{a}_m\tilde{\vec{e}}_m$, tad $\tilde{a}_m = a_i \underbrace{\left(\vec{e}_i, \tilde{\vec{e}}_m\right)}_{(*)}$; (*) ir skalārais reizinājums; tiek summēts pēc i.

______Spriegums izteikts ar deformāciju ātrumu tenzoru

Deformāciju ātruma tenzoru apzīmē $\dot{e}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -p\delta_{ik} + 2\eta \cdot \dot{e}_{ik}$$

______Deformāciju ātruma tenzora līklīniju koordinātēs iegūšana

Tenzora komponentes pārveidojas kā vektora komponenšu reizinājums. Katrā punktā koordinātes pārveidojas pēc šāda likuma: $\tilde{\dot{e}}_{lm} = \dot{e}_{ik}\left(\vec{e}_i, \tilde{\vec{e}}_l\right)\cdot\left(\vec{e}_k, \tilde{\vec{e}}_m\right)$.

$\tilde{\vec{e}}_l = \frac{1}{h_l}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}$; Ņemot vērā, ka $\vec{e}_i$ ir DOKS orti, tie nevar būt atkarīgi no q_l koordinātēm, tādēļ tos var ienest zem diferenciāļzīmes. $\vec{r}$ reizinot ar DOKS ortu iegūst $\vec{r}$ projekciju uz attiecīgās ass, t.i. koordināti x_i. Tāpēc: $\left(\vec{e}_i, \tilde{\vec{e}}_l\right) = \frac{1}{h_l}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_l}$; $\left(\vec{e}_k, \tilde{\vec{e}}_m\right) = \frac{1}{h_m}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_m}$. Līdz ar to:

$\tilde{\dot{e}}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\frac{1}{h_m h_l}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_m}$. Tā kā $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} = \frac{\partial v_k}{\partial q_l}$ un $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_m} = \frac{\partial v_i}{\partial q_m}$, tad:

$$\tilde{\dot{e}}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_l}\frac{\partial v_k}{\partial q_l}\frac{1}{h_m}\frac{\partial x_k}{\partial q_m} + \frac{1}{h_m}\frac{\partial v_i}{\partial q_m}\frac{1}{h_l}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{h_l}\frac{\partial v_k}{\partial q_l}\frac{1}{h_m}\frac{\partial x_k}{\partial q_m}}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{h_m}\frac{\partial v_i}{\partial q_m}\frac{1}{h_l}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}}_{(II)}\right)$$

Vēl arvien DOKS ir v_i, v_k.

Pārveido (I) daļu, ņemot vērā, ka $\left(\vec{e}_k, \tilde{\vec{e}}_m\right) = \frac{1}{h_m}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_m}$, šo daļu ienes zem diferenciālzīmes.

Tad iegūst:

$$\frac{\partial\left(v_k\vec{e}_k\tilde{\vec{e}}_m\right)}{\partial q_l} = \frac{\partial v_k}{\partial q_l}\left(\vec{e}_k, \tilde{\vec{e}}_m\right) + \underbrace{v_k\vec{e}_k}_{=\vec{v}}\frac{\partial\tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l} \Rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial q_l}\frac{1}{h_m}\frac{\partial x_k}{\partial q_m} = \frac{\partial\left(\vec{v}\tilde{\vec{e}}_m\right)}{\partial q_l} - \vec{v}\frac{\partial\tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l} = \frac{\partial v_m}{\partial q_l} - \vec{v}\frac{\partial\tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}.$$

Analogi pārveido (II) daļu: $\frac{1}{h_m}\frac{\partial v_i}{\partial q_m}\frac{1}{h_l}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}=\frac{\partial v_l}{\partial q_m}-\vec{v}\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_m}$

Deformāciju ātruma tenzora vispārīgā izteiksme

Līdz ar to iegūst: $\tilde{\dot{e}}_{lm}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_l}\frac{\partial v_m}{\partial q_l}+\frac{1}{h_m}\frac{\partial v_l}{\partial q_m}-\frac{1}{h_l}\vec{v}\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}-\frac{1}{h_m}\vec{v}\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_m}\right)$.

Atliek tikai atrast $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}$ un $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_m}$.

Izšķir divas situācijas:

Formula deformāciju ātruma tenzora nediagonālajām komponentēm

Sk. Deformāciju ātruma tenzora vispārīgā izteiksme

Atrod nediagonālo komponenti, kad m≠l

-------------- Teorēma

Ja līklīniju koordinātu sistēma ir ortogonāla un m≠l, tad vektoram $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}$ nav komponentes trešajā virzienā, t.i. $\tilde{\vec{e}}_k\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}=0$.

-------------- Pierādījums

Zināms, ka katrā punktā līklīniju koordinātu sistēma ir ortogonāla un m≠l. Tātad izpildās $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l},\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\right)=0$, tātad var uzrakstīt: $\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l},\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\right)=0$. Izteiksmi pārraksta:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m q_k}+\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_l q_k}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)}_{(*)}-2\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_l q_m}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)}_{(*)}$$

(*) locekļi ir vienādi ar nulli, jo visi indeksi pie q ir dažādi.

Tātad $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_l q_m}=0$. Bet $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}=h_m\tilde{\vec{e}}_m$ un $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}=h_k\tilde{\vec{e}}_k$, ievieto: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\frac{\partial\left(h_m\tilde{\vec{e}}_m\right)}{\partial q_l}=0$, atvasina: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\frac{\partial\left(h_m\tilde{\vec{e}}_m\right)}{\partial q_l}=h_k\tilde{\vec{e}}_k\left(h_m\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}+\tilde{\vec{e}}_m\underbrace{\frac{\partial h_m}{\partial q_l}}_{=0}\right)$, tātad $h_k\tilde{\vec{e}}_k h_m\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}=0$. Tā kā Lamē koeficienti nekad nav nulle, tad sakarība pierādīta.

-------------- Nediagonālās komponentes atrašana

No otras puses par vektoru $\tilde{\vec{e}}_m$ ir zināms, ka tas vienmēr ir vienības vektors, t.i. $\tilde{\vec{e}}_m^{\,2}=1$. Šo izteiksmi atvasinot pēc q_l, iegūst: $\tilde{\vec{e}}_m\cdot\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}=0$ tātad $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}\perp\tilde{\vec{e}}_m$. $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}$ nav komponente ne orta $\tilde{\vec{e}}_m$, ne $\tilde{\vec{e}}_k$ virzienā.

Tātad var rakstīt, ka $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}=\lambda\tilde{\vec{e}}_l$

Atliek atrast λ. Lai atrastu λ, skalāri sareizina: $\lambda = \underbrace{\tilde{\vec{e}}_l \frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l}}_{(*)} = \frac{1}{h_l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\underbrace{\frac{1}{h_m}}_{(**)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \right)$

(*) Ievieto $\tilde{\vec{e}}_l$ un $\tilde{\vec{e}}_m$ izteiksmes

(**) h_m var vienkārši iznest pirms diferenciāļa, jo tā atvasinājums būs nulle

$$\lambda = \frac{1}{h_l}\frac{1}{h_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_m \partial q_l} = \frac{1}{h_l h_m} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{(I)} \frac{\partial}{\partial q_m} \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_l} \right)}_{(II)} = \frac{1}{h_m}\frac{\partial h_l}{\partial q_m}$$

(I) jo skalārais reizinājums nav atkarīgs no vektoru kārtības

(II) šis ir l-tais Lamē koeficients kvadrātā

Līdz ar to $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l} = \frac{1}{h_m}\frac{\partial h_l}{\partial q_m}\tilde{\vec{e}}_l$ (šeit netiek summēts pēc l un m, jo koeficienti parādās abās vienādības pusēs) un

$$\tilde{e}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_l}\frac{\partial v_m}{\partial q_l} + \frac{1}{h_m}\frac{\partial v_l}{\partial q_m} - \frac{1}{h_l}\vec{v}\tilde{\vec{e}}_l \frac{1}{h_m}\frac{\partial h_l}{\partial q_m} - \frac{1}{h_m}\vec{v}\tilde{\vec{e}}_m \frac{1}{h_l}\frac{\partial h_m}{\partial q_l} \right)$$

$$\tilde{e}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_m}\frac{\partial v_l}{\partial q_m} - \frac{1}{h_m h_l} v_l \frac{\partial h_l}{\partial q_m} + \frac{1}{h_l}\frac{\partial v_m}{\partial q_l} - \frac{1}{h_m h_l} v_m \frac{\partial h_m}{\partial q_l} \right)$$

Formula sprieguma tenzora nediagonālajām komponentēm

Iepriekš iegūto formulu var vienkāršot:

$$\tilde{e}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_l}{h_m}\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{v_l}{h_l}\right) + \frac{h_m}{h_l}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{v_m}{h_m}\right) \right)$$

Aprēķina piemērus

sk. Sprieguma tenzors cilindriskajā koordinātu sistēmā

sk. Sprieguma tenzors sfēriskajā koordinātu sistēmā

Formula deformāciju ātruma tenzora diagonālajām komponentēm

Formulas diagonālajām komponentēm iegūšana

Līdzīgi kā iepriekš iegūst: $\tilde{e}_{ll} = \frac{1}{h_l}\frac{\partial v_l}{\partial q_l} - \frac{1}{h_l}\vec{v}\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l}$.

Jāatrod $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l}$.

Lieto viltīgu paņēmienu, sakot, ka $\tilde{\vec{e}}_l = \frac{1}{2} e_{lpr}\left(\vec{e}_p \times \vec{e}_r\right)$, kur summēšana ir pēc p un r un e_{lpr} - pilnīgi antisimetrisks trešā ranga tenzors (sk. 12.1. Pilnīgi antisimetrisks trešā ranga tenzors). Atvasinot pēc q_l, iegūst:

$\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l} = \frac{1}{2} e_{lpr}\left(\frac{\partial \vec{e}_p}{\partial q_l} \times \vec{e}_r \right) + \frac{1}{2} e_{lpr}\left(\vec{e}_p \times \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial q_l} \right)$. Izmanto iepriekš iegūto formulu ortu atvasinājumiem ar dažādiem indeksiem: $\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_m}{\partial q_l} = \frac{1}{h_m}\frac{\partial h_l}{\partial q_m}\tilde{\vec{e}}_l$.

$\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l} = \frac{1}{2} e_{lpr} \left(\frac{1}{h_p} \frac{\partial h_l}{\partial q_p} \tilde{\vec{e}}_l \times \vec{e}_r \right) + \frac{1}{2} e_{lpr} \left(\vec{e}_p \times \frac{1}{h_r} \frac{\partial h_l}{\partial q_r} \tilde{\vec{e}}_l \right)$. Šeit summē pēc p un r, jo l abās pusēs. Vajag tikt vaļā no antisimetriskā trešā ranga tenzora. Izmanto antisimetriska tenzora īpašības un maina e_{lpr} indeksu kārtību.

$$\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l} = \frac{1}{2} \frac{1}{h_p} \frac{\partial h_l}{\partial q_p} \underbrace{(-e_{plr})(\tilde{\vec{e}}_l \times \vec{e}_r)}_{=\vec{e}_p} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{h_r} \frac{\partial h_l}{\partial q_r} \underbrace{(-e_{rpl})(\vec{e}_p \times \tilde{\vec{e}}_l)}_{=\vec{e}_r}}_{(I)}.$$

(I) Šajā daļā var veikt indeksu pārsaukšanu: pārsauc p→r un r→p. Tā var darīt, jo tikai pēc l nenotiek summēšana.
Viegli var redzēt, ka pēc indeksu pārsaukšanas, iegūtie locekļi ir vienādi. Esam ieguvuši:
$\frac{\partial \tilde{\vec{e}}_l}{\partial q_l} = -\frac{1}{h_p} \frac{\partial h_l}{\partial q_p} \vec{e}_p$; p≠l un attiecīgi

________deformāciju ātruma tenzora diagonālās komponentes

$$\tilde{\dot{e}}_{ll} = \frac{1}{h_l} \frac{\partial v_l}{\partial q_l} + \frac{1}{h_l} \frac{1}{h_p} \vec{v}\vec{e}_p \frac{\partial h_l}{\partial q_p} = \frac{1}{h_l} \left(\frac{\partial v_l}{\partial q_l} + \frac{v_p}{h_p} \frac{\partial h_l}{\partial q_p} \right)$$
, tiek summēts pēc p.

______Deformāciju ātruma tenzora komponenšu atrašanas formulas

________Tenzora nediagonālajām komponentēm

$$\tilde{\dot{e}}_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_l}{h_m} \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{v_l}{h_l} \right) + \frac{h_m}{h_l} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{v_m}{h_m} \right) \right)$$

________Tenzora diagonālajām komponentēm

$$\tilde{\dot{e}}_{ll} = \frac{1}{h_l} \frac{\partial v_l}{\partial q_l} + \frac{1}{h_l} \frac{1}{h_p} \vec{v}\vec{e}_p \frac{\partial h_l}{\partial q_p} = \frac{1}{h_l} \left(\frac{\partial v_l}{\partial q_l} + \frac{v_p}{h_p} \frac{\partial h_l}{\partial q_p} \right)$$

Sk. Orti un Lamē koeficients

13.4. POLĀRĀ KOORDINĀTU SISTĒMA

13.4.1. Polārās atskaites sistēmas ievešana

______polārā atskaites sistēma

Izmanto punkta kustības izteikšanai plaknē.
Ieved polāro asi ar sākumpunktu – polu O. Šī ass atrodas punkta kustības plaknē.
Punktu raksturo ar

- attālumu no no pola – polārais rādiuss r
- polārā rādiusa stāvokli pret polāro asi – leņķis φ

______Punkta kustības likums

Polārie punkta kustības vienādojumi:
$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t)$

______Sakarība starp taisnleņķa un polārajām koordinātām

$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z$

______Vienības vektori polārajā koordinātu sistēmā

polārā rādiusa r virzienā $\vec{e}_r$
perpendikulāri rādiusa virzienam φ pozitīvā pieauguma virzienā atliek $\vec{e}_\varphi$
Abi vienības vektori, kas ir arī virziena vektori, griežas kopā ar polāro rādiusu ap punktu O.

______Punkta rādiusvektors

$\vec{\rho} = r \cdot \vec{e}_r$

13.4.2. Ātrums polārajā koordinātu sistēmā

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{(I)}\cdot r$$

(I) ir vienības vektora atvasinājums pēc laika. $\vec{e}_r$ modulis laikā nemainās, mainās tikai tā virziens. Tāda vektora atvasinājums ir vērsts perpendikulāri pašam vektoram tā galapunkta stāvokļa izmaiņas virzienā. Tātad $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ virziens ir $\vec{e}_\varphi$. Atliek noskaidrot $\left|\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|$ moduli.

Vektora $\vec{e}_r$ galapunkta stāvokļa izmaiņa $d\vec{e}_r$ ir uzrakstāma: $|d\vec{e}_r| = |\vec{e}_r| d\varphi$. Tā kā $|\vec{e}_r| = 1$, iegūst: $\left|\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right| = \left|\frac{|\vec{e}_r| d\varphi}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt}$

Līdz ar to $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$

Ātruma izteiksme

Ātruma izteiksme

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\cdot r$$

Redzams, ka punkta ātrums izteikts ar divām savstarpēji perpendikulārām koordinātēm

Transversālais ātrums

Komponente pie $\vec{e}_\varphi$: $v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\cdot r$.

Radiālais ātrums

Komponente pie $\vec{e}_r$: $v_r = \frac{dr}{dt}$

Ātruma modulis

$$v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$$

Ātruma virzienvektors

$\vec{e}_v$, tas izsakāms: $\vec{e}_v = \vec{e}_\varphi \frac{v_\varphi}{v} + \vec{e}_r \frac{v_r}{v}$

ātruma vektora virziena leņķi

$\cos(\vec{v},\vec{e}_\varphi) = \frac{v_\varphi}{v}$; $\cos(\vec{v},\vec{e}_r) = \frac{v_r}{v}$

13.4.3. Paātrinājums polārajās koordinātēs

Paātrinājuma iegūšana

Paātrinājumu iegūst, atvasinot pēc laika iepriekš iegūto ātruma izteiksmi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\cdot r\right) = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}\cdot\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi r + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\cdot r\right)$$

$$\vec{a} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{d^2r}{dt^2}\cdot\vec{e}_r + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi r + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\cdot r + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Jāatrod $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$. Tā virziens vērsts perpendikulāri $\vec{e}_\varphi$ un uz to pusi, uz kuru pārvietojas vektora galapunkts. Šis virziens ir pretējs rādiusa virzienam, tātad tas ir $-\vec{e}_r$. Spriežot līdzīgi kā aprēķinot $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$, iegūst: $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_r$.

Līdz ar to:

$$\vec{a} = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{d^2r}{dt^2}\cdot\vec{e}_r + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi r - \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_r\cdot r$$

Paātrinājuma izteiksme

$$\vec{a} = \vec{e}_\varphi\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) + \vec{e}_r\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

$$\vec{a} = \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) + \vec{e}_r\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

Transversālais paātrinājums

Komponente pie $\vec{e}_\varphi$: $a_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$.

Radiālais paātrinājums

Komponente pie $\vec{e}_r$: $a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$

Tangenciālais paātrinājums

a_τ= dv/dt Ātruma moduli atvasinot, iegūst: $a_\tau = \frac{v_\varphi a_\varphi + v_r a_r}{v}$

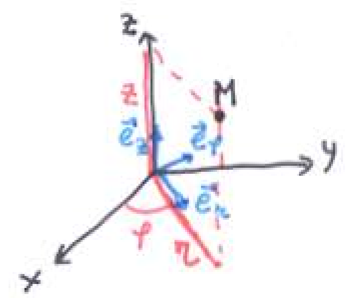
13.5. CILINDRISKĀ KOORDINĀTU SISTĒMA [34],[15]

13.5.1. Cilindriskās atskaites sistēmas ieviešana

Ieved cilindrisko koordinātu sistēmu: polārā ass – z ass, ieved plakni, kas perpendikulāra šai polārajai asij. Ieved atskaites plakni xz.

Punkta stāvokli plaknē raksturo ar:

- punkta attālumu līdz polārajai asij, rādiuss r
- punkta attālumu līdz plaknei xy - augstums z
- leņķi starp punktu un atskaites plakni, kas nosaka rādiusvektora stāvokli φ



Punkta kustības likums

Vienādojumi, kas ir punkta kustības likums cilindriskajā koordinātu sistēmā:

$r = r(t);\quad \varphi = \varphi(t);\quad z = z(t)$

Sakarība starp taisnleņķa un cilindriskajām koordinātām

$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi;\quad z = z$

Vienības vektori cilindriskajā koordinātu sistēmā

Sākumpunktā atliek
vienības vektoru rādiusa r virzienā $\vec{e}_r$
perpendikulāri rādiusa virzienam r pozitīva griešanās virziena virzienā atliek $\vec{e}_\varphi$
z ass virzienā atliek $\vec{e}_z$

Punkta rādiusvektors

Var tikt izteikts, kā vektoru summa (sk. attēlu):

$$\vec{\rho} = r\cdot\vec{e}_r + z\cdot\vec{e}_z$$

13.5.2. Ātrums cilindriskajā koordinātu sistēmā

Atvasinot rādiusvektora izteiksmi pēc laika, iegūst ātrumu cilindriskajā koordinātu sistēmā:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \frac{d\vec{e}_r}{dt}\cdot r + z\cdot\underbrace{\frac{d\vec{e}_z}{dt}}_{=0} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}\cdot r + \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r}_{(*)} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{e}_z$$

Ātruma izteiksme

Tā kā polārās koordinātu sistēmas (sk. 13.4.1. Punkta rādiusvektors) rādiusvektora izteiksme pilnībā ietilpst cilindriskās koordinātu sistēmas (sk. 13.5.1. Punkta rādiusvektors) rādiusvektora izteiksmē un ātrums polārajās koordinātēs ir jau atrasts, tad atliek pievienot šai izteiksmei koordinātes z atvasinājumu pēc laika:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \frac{d\varphi}{dt}\cdot r\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{e}_z$$

13.5.3. Paātrinājums cilindriskajā koordinātu sistēmā

Paātrinājuma atrašana

Atrod, atvasinot ātruma izteiksmi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + \frac{d\varphi}{dt}\cdot r\vec{e}_\varphi}_{(I)} + \underbrace{\frac{dz}{dt}\cdot\vec{e}_z}_{(II)}\right)$$

(I) atvasinājums jau ir atrasts kā paātrinājums polārajās koordinātēs (sk. 13.4.3. Paātrinājums polārajās koordinātēs):

$$\frac{d(I)}{dt} = \vec{e}_\varphi\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) + \vec{e}_r\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

(II) Atrod $\dfrac{d(II)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dz}{dt}\cdot\vec{e}_z\right) = \dfrac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{e}_z + \underbrace{\dfrac{d\vec{e}_z}{dt}}_{=0}\cdot z$

Paātrinājuma izteiksme

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{e}_\varphi\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) + \vec{e}_r\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) + \vec{e}_z\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$

13.5.4. Lamē koeficienti cilindriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.1.2. Līklīniju sistēmas orti un metriskais tenzors
Bez pierādījuma:

$h_1=1;\ h_2=r;\ h_3=1$

Sk. līdzīgu izvedumu Lamē koeficienti sfēriskajā koordinātu sistēmā

13.5.5. Diverģence cilindriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.2. Diverģence līklīniju koordinātu sistēmā

Sk. 13.5.4. Lamē koeficienti cilindriskajā koordinātu sistēmā

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(a_r r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

13.5.6. Sprieguma vektora komponenšu izteiksmes cilindriskajā koordinātu sistēmā

Diverģence no sprieguma tenzora cilindriskajās koordinātēs:

Pēc diverģences līklīniju koordinātās formulas:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\vec{\sigma}_k=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\underbrace{\vec{\sigma}_r r}_{(*)}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\vec{\sigma}_\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\sigma}_z r)\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\vec{\sigma}_r r)+\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}$$

(*) tie ir spriegumi, kas darbojas uz virsmas elementu ar normāli r virzienā.

Sprieguma vektora komponenšu izteiksmes

Iegūst r-to komponenti

Tagad jāizsaka spēkam e, φ, z –to komponenti, t.i. σ_{ik} otro indeksu.

$$\vec{\sigma}_r=\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_r=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\underbrace{\underbrace{\vec{e}_r}_{(I)}\vec{\sigma}_r r}_{(II)}\right)+\underbrace{\frac{\vec{e}_r}{r}\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}}_{(III)}+\underbrace{\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}}_{(IV)}$$

(I) $\vec{e}_r$ nav atkarīgs no r vērtības, tāpēc to drīkst ienest zem diferenciālzīmes

(II) $\vec{e}_r\cdot\vec{\sigma}_r$ ir $\vec{\sigma}_r$ projekcija r virzienā, tātad $\vec{e}_r\cdot\vec{\sigma}_r=\sigma_{rr}$

(III) Izsaka $\vec{e}_r\dfrac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}$, ienesot $\vec{e}_r$ zem diferenciālzīmes:

$$\underbrace{\frac{\partial(\vec{e}_r\vec{\sigma}_\varphi)}{\partial\varphi}}_{\vec{e}_r\vec{\sigma}_\varphi=\sigma_{r\varphi}}=\underbrace{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}}_{=\vec{e}_\varphi}\vec{\sigma}_\varphi+\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}=\sigma_{\varphi\varphi}+\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}\quad\Rightarrow\quad\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}=\frac{\partial\vec{\sigma}_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\vec{\sigma}_{\varphi\varphi}$$

(IV) Izsaka $\vec{e}_r\dfrac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}$, ienesot $\vec{e}_r$ zem diferenciālzīmes:

$$\underbrace{\frac{\partial(\vec{e}_r\vec{\sigma}_z)}{\partial z}}_{\sigma_{rz}}=\vec{\sigma}_z\underbrace{\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial z}}_{=0}+\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\quad\Rightarrow\quad\vec{e}_r\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}$$

Tātad sprieguma vektora r-tā komponente ir:

$$\vec{\sigma}_r=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rr}r)+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}$$

Iegūst φ-to komponenti

$$\vec{\sigma}_\varphi=\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_\varphi=\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial(\vec{e}_\varphi\vec{\sigma}_r r)}{\partial r}}_{(I)}+\underbrace{\frac{\vec{e}_\varphi}{r}\frac{\partial\vec{\sigma}_\varphi}{\partial\varphi}}_{(II)}+\underbrace{\frac{\partial(\vec{e}_\varphi\vec{\sigma}_z)}{\partial z}}_{(III)}$$

(I) $\vec{e}_\varphi$ nav atkarīgs no r vērtības, tāpēc to drīkst ienest zem diferenciālzīmes

(III) Izsaka $\vec{e}_\varphi \dfrac{\partial \vec{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi}$, ienesot $\vec{e}_r$ zem diferenciālzīmes:

$$\underbrace{\frac{\partial(\vec{e}_\varphi \vec{\sigma}_\varphi)}{\partial \varphi}}_{\vec{e}_\varphi \vec{\sigma}_\varphi = \sigma_{\varphi\varphi}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}}_{= -\vec{e}_r} \vec{\sigma}_\varphi + \vec{e}_\varphi \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{\sigma}_{r\varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} \Rightarrow \vec{e}_\varphi \frac{\partial \vec{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} = \sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}$$

(III) $\vec{e}_\varphi$ nav atkarīgs no z vērtības, tāpēc to drīkst ienest zem diferenciālzīmes

Tātad sprieguma vektora φ-tā komponente ir:

$$\vec{\sigma}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{\varphi r} r) + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z}$$

Iegūst z-to komponenti

$\vec{e}_z$ nav atkarīgs ne no r, ne φ, ne z vērtības, tāpēc to drīkst ienest zem visām diferenciālzīmēm

$$\vec{\sigma}_z = \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(\vec{e}_z \vec{\sigma}_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{e}_z \vec{\sigma}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\vec{e}_z \vec{\sigma}_z)}{\partial z}$$

Tātad sprieguma vektora z-tā komponente ir:

$$\vec{\sigma}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{zr} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

13.5.6. Sprieguma tenzora komponenšu atrašana cilindriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.3.1. Deformāciju ātruma tenzora komponenšu atrašanas formulas
Sk. 13.5.4. Lamē koeficienti cilindriskajā koordinātu sistēmā

Piemērs

Atrast $\sigma_{\varphi\varphi}$ cilindriskajā koordinātu sistēmā.

Sprieguma izteiksme $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta \cdot \dot{e}_{ik}$

Aprēķina deformāciju ātrumu tenzoru: $\dot{e}_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_r}{1}\dfrac{\partial r}{\partial r} + \dfrac{v_z}{1}\underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial z}}_{=0}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_r}{r}$

un līdz ar to iegūst:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta \cdot \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right)$$

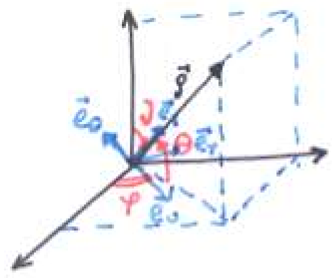
Līdzīgi iegūst visas pārējās sprieguma tenzora komponentes.

13.6. SFĒRISKĀ KOORDINĀTU SISTĒMA

13.6.1. Sfēriskās atskaites sistēmas ieviešana

Koordinātu sākumpunkts - pols O.
Punktu raksturo ar

- attālumu no pola – polārais rādiuss ρ
- polārā rādiusa stāvoklis pret plakni xy – leņķis θ jeb platums
- polārā rādiusa projekcijas stāvoklis plaknē xy – leņķis φ jeb garums jeb azimuts



Punkta kustības likums

Sfēriskie punkta kustības vienādojumi:

$$\rho=\rho(t);\quad \varphi=\varphi(t);\quad \theta=\theta(t)\ \textit{vai}\quad \nu=\nu(t)$$

Sakarība starp taisnleņķa un sfēriskajām koordinātām

sk. zīm.

$$x=\rho\cos\theta\cos\varphi;\quad y=\rho\cos\theta\sin\varphi;\quad z=\rho\sin\theta$$

vai

$$x=\rho\sin\nu\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\nu\sin\varphi;\quad z=\rho\cos\nu$$

Vienības vektori sfēriskajā koordinātu sistēmā

polārā rādiusa ρ virzienā $\vec{e}_\rho$

perpendikulāri rādiusa virzienam θ pozitīvā pieauguma virzienā atliek $\vec{e}_\theta$ vai arī atliek $\vec{e}_\nu$ ν pozitīvā pieauguma virzienā

perpendikulāri abiem iepriekšējiem vienības vektoriem φ pozitīvā pieauguma virzienā atliek $\vec{e}_\varphi$.

Vienības vektoru atvasinājumi pēc laika:

Vienības vektoru projekcijas uz DOKS koordinātu asīm:

$$\vec{e}_{\rho DOKS}=\vec{i}\cos\theta\cos\varphi+\vec{j}\cos\theta\sin\varphi+\vec{k}\sin\theta$$

$$\vec{e}_{\theta DOKS}=-\vec{i}\sin\theta\cos\varphi-\vec{j}\sin\theta\sin\varphi+\vec{k}\cos\theta$$

$$\vec{e}_{\varphi DOKS}=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi$$

Atvasinājumi pēc laika

$$\frac{de_\rho}{dt}=-\vec{i}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\cos\varphi-\vec{i}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\theta-\vec{j}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\sin\varphi+\vec{j}\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta\cos\varphi+\vec{k}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$$\frac{de_\theta}{dt}=-\vec{i}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\cos\varphi+\vec{i}\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\varphi-\vec{j}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\sin\varphi-\vec{j}\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\varphi-\vec{k}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$

$$\frac{de_\varphi}{dt}=-\vec{i}\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi-\vec{j}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi$$

vienības vektoru atvasinājumi izteikti ar vienības vektoru palīdzību

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}=\vec{e}_\theta\frac{d\theta}{dt}+\vec{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho-\vec{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}=-\vec{e}_\rho\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta+\vec{e}_\theta\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta$$

Punkta rādiusvektors

$$\vec{\rho} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$$

13.6.2. Ātrums sfēriskajā koordinātu sistēmā

Ātruma izteiksmes iegūšana

Sk. 13.6.1. Punkta rādiusvektors un vienības vektoru atvasinājumi izteikti ar vienības vektoru palīdzību

Iegūst atvasinot rādiusvektora izteiksmi.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{e}_\rho + \underbrace{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}}_{(I)} \cdot \rho$$

$$(I)\quad \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta$$

ātruma izteiksme sfēriskajās koordinātēs:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \rho + \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cdot \rho$$

13.6.3. Paātrinājums sfēriskajās koordinātēs

Paātrinājuma izteiksmes iegūšana

Sk. 13.6.1. vienības vektoru atvasinājumi izteikti ar vienības vektoru palīdzību

Sk. 13.6.2. Ātruma izteiksme sfēriskajās koordinātēs

Iegūst atvasinot pēc laika ātruma izteiksmi.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cdot \rho + \vec{e}_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \rho + \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dt} +$$

$$+ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cdot \rho + \vec{e}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\theta \cdot \rho - \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \cdot \rho + \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \vec{e}_\varphi \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta - \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\rho \rho - \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \rho + \vec{e}_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \rho + \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dt} +$$

$$- \vec{e}_\rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos^2\theta \cdot \rho + \vec{e}_\theta \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cdot \rho + \vec{e}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\theta \cdot \rho - \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \cdot \rho + \vec{e}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta \cdot \frac{d\rho}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos^2\theta \cdot \rho - \frac{d^2\theta}{dt^2} \rho \right) \cdot \vec{e}_\rho + \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \rho + 2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \rho \right) \cdot \vec{e}_\theta +$$

$$+ \left(2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta - 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \cdot \rho + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\theta \cdot \rho \right) \vec{e}_\varphi$$

Paātrinājuma komponentes sfēriskajā koordinātu sistēmā

$$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos^2\theta \right)$$

$$a_\theta = 2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \rho \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin\theta\cos\theta \right)$$

$$a_\varphi = 2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta + \rho \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\theta - 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right)$$

13.6.4. Lamē koeficienti sfēriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.1.2. Līklīniju sistēmas orti un metriskais tenzors
Sk. 13.6.1. Sakarība starp taisnleņķa un sfēriskajām k.

Aprēķins

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi; \qquad y = \rho\cos\theta\sin\varphi; \qquad z = \rho\sin\theta$$

$$(d\vec{\rho})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$(dx)^2 = (\cos\theta\cos\varphi d\rho - \rho\sin\theta\cos\varphi d\theta - \rho\cos\theta\sin\varphi d\varphi)^2$$

$$(dy)^2 = (\cos\theta\sin\varphi d\rho - \rho\sin\theta\sin\varphi d\theta + \rho\cos\theta\cos\varphi d\varphi)^2$$

$$(dz)^2 = (d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta d\theta)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(dx)^2 = \cos^2\theta\cos^2\varphi d\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2 -$$
$$- 2\rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\rho d\theta + 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi - 2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi$$

$$(dy)^2 = \cos^2\theta\sin^2\varphi d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2 + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 +$$
$$- 2\rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi d\rho d\theta + 2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi - 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi$$

$$(dz)^2 = \sin^2\theta d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta d\theta^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta d\theta d\rho$$

$$\Downarrow$$

$$(d\vec{\rho})^2 = \cos^2\theta\cos^2\varphi d\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2 -$$
$$- 2\rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\rho d\theta + 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi - 2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi +$$
$$+ \cos^2\theta\sin^2\varphi d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2 + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 +$$
$$- 2\rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi d\rho d\theta + 2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi - 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi +$$
$$+ \sin^2\theta d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta d\theta^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta d\theta d\rho$$

$$\Downarrow$$

$$(d\vec{\rho})^2 = \cos^2\theta d\rho^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\right) + \sin^2\theta d\rho^2 +$$
$$+ \rho^2\sin^2\theta d\theta^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\right) + \rho^2\cos^2\theta d\theta^2 +$$
$$+ \rho^2\cos^2\theta d\varphi^2\left(\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}\right) -$$
$$- \underbrace{2\rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\rho d\theta - 2\rho\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi d\rho d\theta + 2\rho\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta}_{=0} +$$
$$+ \underbrace{2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi - 2\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi}_{=0} +$$
$$+ \underbrace{2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi - 2\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$(d\vec{\rho})^2 = d\rho^2\left(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}\right) + \rho^2 d\theta^2\left(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}\right) + 2\rho^2\cos^2\theta d\varphi^2$$

$$\Downarrow$$

$$(d\vec{\rho})^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\cos^2\theta d\varphi^2$$

Sfēriskās koordinātu sistēmas metriskais tenzors

$$g_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Lamē koeficienti sfēriskajā sistēmā:

$h_\rho=1$; $h_\theta=\rho$; $h_\varphi=\rho\cos\theta$

13.6.5. Diverģence sfēriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.2. Diverģence līklīniju koordinātu sistēmā
Sk. 13.6.4. Lamē koeficienti sfēriskajā koordinātu sistēmā

Pēc diverģences līklīniju koordinātās formulas:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_k = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a_\rho\rho^2\cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\theta\rho\cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_\varphi\rho\right)\right)$$

jeb

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_k = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left(\rho^2\cos\theta\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} + 2\rho\cos\theta a_\rho + \rho\cos\theta\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} - \rho\sin\theta a_\theta + \rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

13.6.6. Rotors sfēriskajā koordinātu sistēmā

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot a_\varphi\right) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_\varphi\right)\right)\right)\vec{e}_\theta$$

13.6.7. Sprieguma tenzora komponentes sfēriskajā koordinātu sistēmā

Sk. 13.3.1. Deformāciju ātruma tenzora komponenšu atrašanas formulas
Sk. 13.6.4. Lamē koeficienti sfēriskajā koordinātu sistēmā

Sprieguma tenzora komponenšu atrašana

Piemērs

Sprieguma izteiksme $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta\cdot\dot{e}_{ik}$

Atrast $\sigma_{\varphi\varphi}$ sfēriskajā koordinātu sistēmā.
Vispirms atrod deformāciju tenzoru:

$$\dot{e}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho\cos\theta}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_\rho}{1}\frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial\rho} + \frac{v_\theta}{\rho}\frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{\rho\cos\theta}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_\rho}{1}\cos\theta - \frac{v_\theta}{\rho}\rho\sin\theta\right)$$

$$\dot{e}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_\rho}{\rho} - \frac{v_\theta \mathrm{tg}\theta}{\rho}$$

un

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\cdot\left(\frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_\rho}{\rho} - \frac{v_\theta \mathrm{tg}\theta}{\rho}\right)$$

Līdzīgi var iegūt pārējās sprieguma tenzora komponentes. Visas sprieguma tenzora komponentes sfēriskajā koordinātu sistēmā var atrast [15], 77.lpp.

13.6.8. Mainīgo transformācija 3kāršajā integrālī no DOKS uz sfērisko KS

Mainīgo transformācijas formula

Ja jāpāriet no DOKS uz sfērisko koordinātu sistēmu:

$$dxdydz=|J|drd\nu d\varphi$$

Jakobiāns

veco (DOKS) koordināšu atvasinājumi pēc jaunajām (sfēriskajām)

Vecās koordinātes jāizsaka ar jaunajām.

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\nu\cos\varphi & \sin\nu\sin\varphi & \cos\nu\\ r\cos\nu\cos\varphi & r\cos\nu\sin\varphi & -r\sin\nu\\ -r\sin\nu\sin\varphi & r\sin\nu\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\sin\nu\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\nu\cos\varphi-\sin\nu\sin\varphi\cdot\left(-r^2\sin^2\nu\sin\varphi\right)+$$

$$+\cos\nu\left(r^2\sin\nu\cos\nu\cos^2\varphi+r^2\sin\nu\cos\nu\sin^2\varphi\right)=$$

$$=r^2\sin^3\nu\cos^2\varphi+r^2\sin^3\nu\sin^2\varphi+r^2\sin\nu\cos^2\nu\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=$$

$$=r^2\sin^3\nu+r^2\sin\nu\cos^2\nu=r^2\sin\nu\left(\sin^2\nu+\cos^2\nu\right)=r^2\sin\nu$$

13.6.9. Laplasa operators sfēriskajā koordinātu sistēmā

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sin\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\nu}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}$$